DM–IMECC–UNICAMP
Geometria Analítica e Vetores - MA141 - Turma Z
Prof. Marcelo M. Santos
2a. prova, 20/05/2009

Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura: __________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações; Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco na ordem crescente e da seguinte maneira:*
1a. Folha - Questão 1; 2a. Folha - Questão 2;
3a. Folha - Questão 3; 4a. Folha - Questão 4.
A última folha e o verso da folha de questões podem ser usados para rascunho.
Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

1. Sejam U, V e W os vetores $U = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $V = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $W = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Calcule:
   a) (1,0 ponto) o volume do paralelepípedo determinado pelos mesmos;
   b) (1,0 ponto) a projeção ortogonal $Proj_U W$ de W em relação a U;
   c) (1,0 ponto) a equação do plano que contém a face com as arestas U e V;
   d) (1,0 ponto) a altura do paralelepípedo em relação à face do item **c)**;
   e) (1,0 ponto) os produtos vetoriais $U \times V$ e $U \times W$ e o ângulo (o coseno do ângulo) entre os planos contendo as faces de arestas U e V e U e W.

2. **a) (0,5 pontos)** Verifique se as retas $r: x = 2-t, y = 3+2t, z = 1+t$ e $s: \frac{5-x}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{2}$ são paralelas ou reversas;
   b) (1,0 ponto) Calcule a distância entre as mesmas.

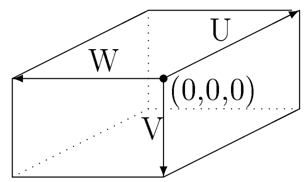
3. **(2,0 pontos)** Determine a posição relativa dos planos $x - 2y + 3z = 2$, $7y - 11z = -5$ e $7y - 11z = -6$.

4. Dado um plano qualquer com um sistema de coordenadas xy encontre os vértices (ou vértice) e os focos (ou foco) da cônica $4x^2 + 9y^2 = 144$. **(1,0 ponto.)** Esboce o gráfico. **(0,5 pontos.)** Descreva a cônica como uma equação $dist(P, F) = e\, dist(P, r)$ em que são fixados um número positivo e e uma reta r, os quais devem ser determinados. **(1,0 ponto.)**

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.
Boa prova!

Gabarito

Questão 1.



$$U = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},\ V = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ W = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

a) Volume determinado pelos vetores. O volume é dado por $|U \cdot (V \times W)|$ ou $|\det \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}|$ (**0,5 pontos** até aqui.)

$$= \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = |-1 - 9 - 10| = 20.$$

(+ **0,5 pontos** até aqui.)

b) Projeção ortogonal $Proj_U W$.

$Proj_U W = \frac{W \cdot U}{\|U\|^2} U$ (**0,3 pontos**.)

$$= \frac{(1,-2,1)\cdot(1,3,2)}{1+9+4} U = \frac{1-6+2}{14} U = \frac{-3}{14} U = (\frac{-3}{14}, \frac{-9}{14}, \frac{-3}{7}).$$

(+ **0,7 pontos**.)

c) Equação do plano que contém a face com as arestas U e V. Um vetor normal ao plano é

$$V\times U = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (2+3, -4-1, 6-1) = (5, -5, 5).$$

(**0,5 pontos**.)

Daí, como o plano passa pela origem, a equação é

$$5x - 5y + 5z = 0 \text{ ou } x - y + z = 0\,.$$

(+ **0,5 pontos**.)

d) Altura do paralelepípedo em relação à face do item **c)**. A altura, a qual denotaremos por h, pode ser dada pela distância do ponto $W = (1, -2, 1)$ ao plano do item **c)** (**0,3 pontos**.)

Usando a fórmula da distância de um ponto a um plano, e o vetor normal calculado no item **c)**, temos: $h = \frac{|W\cdot(V\times U)|}{\|V\times U\|}$ (+ **0,4 pontos**.)

$$= \frac{|(1, -2, 1)\cdot(1, -1, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

(+ **0,3 pontos**.)

e) Os produtos vetoriais $U\times V$ e $U\times W$ e o ângulo entre os planos contendo as faces de arestas U e V e U e W.

Foi calculado no item **c)** $V \times U = (5, -5, 5)$, logo, $U \times V = -V \times U = (-5, 5, -5)$. Calculando $U \times W$, temos:

$$\begin{aligned} U\times W &= \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3+4, -1+2, -2-3) \\ &= (7, 1, -5). \end{aligned}$$

(**0,3 pontos** até aqui.)

Usando que $U \times V$ e $U \times W$ são vetores normais aos planos dados, e usando a fórmula do coseno do ângulo θ entre planos, temos:

$$\cos\theta = \frac{|(U\times V)\cdot(U\times W)|}{\| U\times V \| \| U\times W \|}$$

(+ **0,4 pontos**.)

$$= \frac{|(1, -1, 1)\cdot(7, 1, -5)|}{\sqrt{3}\sqrt{49+1+25}} = \frac{|7-1-5|}{\sqrt{3}\sqrt{75}} = \frac{1}{\sqrt{35}\sqrt{3}} = \frac{1}{15}.$$

(+ **0,3 pontos**.)

Questão 2. a) *Verifique se as retas* $r: x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 1 + t$ *e* $s: \frac{5-x}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{2}$ *são paralelas ou reversas.*

Pelas formas das equações dadas, vemos que vetores paralelos às retas são, respectivamente, $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$ e $\mathbf{u} = (-2, 4, 2)$. (**0,25 pontos**.)
Como $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1$, as retas são paralelas. (+ **0,25 pontos**.)

b) (1,0 ponto) Distância entre as retas.

Pela fórmula da distância d entre retas paralelas, temos:

$$d = \frac{\| \vec{P_1P_2} \times \mathbf{v} \|}{\| \mathbf{v} \|}$$

(**0,4 pontos**.)
onde P_1 e P_2 são pontos nas retas, respectivamente. Tomando $P_1 = (2, 3, 1)$ e $P_2 = (5, 2, 1)$, (+ **0,2 pontos**.)
temos:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\| (3, -1, 0) \times (-1, 2, 1) \|}{\sqrt{1+4+1}} \\ &= \| (\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) \| / \sqrt{6} \\ &= \| (-1, -3, 5) \| / \sqrt{6} = \sqrt{35} / \sqrt{6}. \end{aligned}$$

(+ **0,4 pontos**.)

Questão 3. Posição relativa dos planos $x - 2y + 3z = 2$, $7y - 11z = -5$ e $7y - 11z = -6$.

Os vetores normais aos planos são $N_1 = (1, -2, 3)$, $N_2 = (0, 7, -11)$ e $N_3 = (0, 7, -11)$. Como dois dos vetores normais são paralelos (iguais) os planos correspondentes são paralelos, e como as equações destes não são proporcionais (o "d" (termo independente) de um não é igual ao "d" do outro enquanto que os vetores normais são iguais) eles são paralelos e distintos.

(**1,0 ponto**.)

O terceiro plano intercepta estes dois, já que o seu vetor normal N_1 não é paralelo aos outros dois vetores normais paralelos (iguais). (+ **1,0 ponto**.)

Questão 4. *Dado um plano qualquer com um sistema de coordenadas xy encontre os vértices (ou vértice) e os focos (ou foco) da cônica* $4x^2+9y^2 = 144$. **(1,0 ponto.)** *Esboce o gráfico.* **(0,5 pontos.)** *Descreva a cônica como uma equação* $dist(P, F) = e\, dist(P, r)$ *em que são fixados um número positivo e e uma reta r, os quais devem ser determinados.* **(1,0 ponto.)**

A equação dada pode ser escrita na forma canônica

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

logo a cônica é uma elipse com vértices em $(-6, 0)$ e $(6, 0)$
(note que $y = 0 \Rightarrow x^6 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$) (**0,5 pontos**.)
e focos em $(\pm c, 0)$ onde $16 = b^2 = 6^2 - c^2$, $c > 0$, i.e. $c^2 = 36 - 16 = 20$, $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, ou seja os focos são $(-2\sqrt{5}, 0)$ e $(2\sqrt{5}, 0)$. (+ **0,5 pontos**.)

Gráfico ... (+ **0,5 pontos**.)

A cônica como a equação $dist(P, F) = e\, dist(P, r)$:

A excentricidade da elipse é $e = c/a = (2\sqrt{5})/6 = \sqrt{5}/3$. Tomando $F = (2\sqrt{5}, 0)$ (o foco da direita) e $r : x = c/e^2 = a^2/c = 36/2\sqrt{5} = 18/\sqrt{5}$,

(+ **0,5 pontos**.)

temos que a equação da elipse é equivalente a

$$dist(P, F) = e\, dist(P, r)$$

i.e. se escrevermos $P = (x, y)$, ficamos com

$$\| (x, y) - (2\sqrt{5}, 0) \| = (\sqrt{5}/3)|x - 18/\sqrt{5}|$$
$$\| (x, y) - (2\sqrt{5}, 0) \|^2 = (\sqrt{5}/3)^2(x - 18/\sqrt{5})^2$$
$$(x - 2\sqrt{5})^2 + y^2 = (5/9)(x - 18/\sqrt{5})^2.$$

(+ **0,5 pontos**.)