Equações Diferenciais Parciais I - MM433
2s2014 **1a. prova, 13/10/2014**

<u>Notação</u>: Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1.

Questão 1.(Lista) Resolva o problema
$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u + u = 1, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$
explicitamente, em que $b \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante.

2. (Lista)

a) (0,5 pontos) Enuncie a fórmula de Poisson na bola.

b) (0,5 pontos) Enuncie a desigualdade de Harnack para um aberto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

c) (1,5 ponto) Mostre a desigualdade de Harnack na bola.

3. Mostre a estimativa da derivada de primeira ordem para funções harmônicas $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$:
$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B_r(x))},$$
para $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, quaisquer.

4. Sejam Φ a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$, f uma função em $L^\infty(\Omega)$ e $u(x) = \int_\Omega \Phi(x-y)f(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$.

a) (0,5 pontos) Mostre que a função $v(x) = \int_\Omega \Phi_{x_i}(x-y)f(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, está bem definida (a função $y \mapsto \Phi_{x_i}(x-y)f(y)$ é integrável em Ω, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, \cdots, n\}$).

b) (0,5 pontos) Seja $v_\epsilon(x) := \int_\Omega \Phi(x-y)\eta(\frac{|x-y|}{\epsilon})f(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, onde η é uma função em $C^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ para $t \leq 1$ e $\eta(t) = 1$ para $t \geq 2$. Mostre que $v_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

c) (1,0 ponto) Mostre a estimativa
$$\|v - \partial_{x_i} v_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_\infty \begin{cases} 4\epsilon(1 + |\log 2\epsilon|), & \text{se } n = 2 \\ \frac{2n\epsilon}{n-2}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

d) (0,5 pontos) Mostre que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. (*Sugestão*: use os itens anteriores.)