DM–IMECC–UNICAMP
Equações Diferenciais Parciais I - MM433
1a. prova, 04/9/2017

Questão 1 **(Lista).** **a) (0,5 pontos)** Descreva as curvas características do problema $u_y = xuu_x, \quad u(x,0) = x$.

b) (2,0) Usando as características, determine a solução do problema acima, dada implicitamente pela equação $ue^{-yu} = x$.

2 **(Lista).** **a) (0,5)** Defina solução entrópica para o problema $u_t + f(u)_x = 0,\ t > 0, x \in \mathbb{R},\ \ u(x,0) = g(x),\ f'' > 0,\ g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) (2,0) Encontre a solução entrópica do problema $u_t + (u^2/2)_x = 0,\ t > 0, x \in \mathbb{R},\ \ u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$.

3. Considere a "equação de transporte" $b(x) \cdot \nabla u = f(x)$ em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ com uma fronteira plana na vizinhança de um ponto $x^0 \in \partial\Omega$; digamos que $\partial\Omega$ intersectada com uma vizinhança de x_0 esteja contida no hiperplano $\{x_n = 0\}$ $(x = (x_1, \cdots, x_n))$. Denote por Γ esta interseção e seja $g \in C^1(\Gamma)$. Suponha b e f de classe C^1 em $\overline{\Omega}$.

a) (0,5) Defina terno admissível e terno não característico para o problema $b(x) \cdot \nabla u = f(x), x \in \Omega, \ \ u|\Gamma = g$.

b) (1,0) Use o Teorema da Aplicação Inversa para mostrar que se $b_n(x^0) \neq 0$ $(b = (b_1, \cdots, b_n))$ então existe uma vizinhança V de x_0 tal que todo ponto $x \in V$ se escreve de maneira única como $x = \Phi(s,y)$, onde $\Phi(s,y)$ é a solução do problema $\dot{\Phi} = b(\Phi),\ \Phi(0,y) = y,\ y \in \Gamma,\ y \approx x^0,\ \dot{\Phi} \equiv \partial_s \Phi$.

c) (1,0) Descreva a solução do problema $b(x) \cdot \nabla u = f(x), x \in \Omega, x \approx x^0;\ \ u(y) = g(y), y \in \Gamma, y \approx x^0$ em termos das características $\Phi(s,y)$.

4.(2,5) Sejam $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}, \mathbb{R}^n_- = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n < 0\}$ e X um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ tal que $X|\mathbb{R}^n_\pm = X_\pm$, onde $X_\pm$ é de classe C^1 e com divergente nulo em $\overline{\mathbb{R}^n_\pm}$. Mostre que $\int_{\mathbb{R}^n} X \cdot \nabla\varphi dx = 0$ para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $X_{+,n} = X_{-,n}$ ao longo do hiperplano $x_n = 0$, onde $X_{\pm,n}$ denota a n-ésima coordenada do campo $X_\pm$.