DM–IMECC–UNICAMP – Álgebra Linear - MA327 - T. #
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova, 09/04/2010**

Aluno: ____________________________ RA: ____________

Assinatura (idêntica à do RG): ________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações.* (RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS!). Ponha suas resoluções nas folhas em branco em ordem crescente. NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular! Cada questão vale 2,0 pontos.

Questão 1. Determine se a afirmação abaixo é falsa ou verdadeira. *Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.* **Justifique com a matéria do Curso.**

a) É possível obter uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por 4 (quatro) vetores.

b) O conjunto dos polinômios de grau um, $V = \{p(x)\ ;\ p(x)=a+bx,\ a, b \in \mathbb{R}\}$, com a soma usual $p_1(x)=a_1+b_1x, p_2(x)=a_2+b_2x \Rightarrow p_1(x)+p_2(x)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)x$ e com o produto por escalar definido por $\alpha\, p(x)=0+\alpha x \equiv \alpha x$, é um espaço vetorial.

Os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ (com a soma e produto por escalar usuais do $\mathbb{R}^n$) são espaços vetoriais:

c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

d) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x + y = 1\}$.

2. Mostre que o conjunto $\beta = \{(1, 1, 1, 1),\ (1, 0, 0, 0),\ (0, 2, 0, 1),\ (0, 0, 0, -1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^4$.

3. Sabe-se que num vetorial V de dimensão finita n, dadas duas bases (ordenadas) β, γ quaisquer, existe uma única matriz P invertível de ordem $n\times n$ tal que as coordenadas $[u]_\beta$, $[u]_\gamma$ de um vetor (elemento) qualquer $u \in V$ em relação as bases β e γ, respectivamente, relacionam-se pelas fórmulas $[u]_\gamma = P[u]_\beta$ e $[u]_\beta = P^{-1}[u]_\gamma$ (teorema do Curso). A matriz P chama-se a *matriz de mudança* da base β para a base γ e é denotada por $[I]^\beta_\gamma$. Para $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 0),\ (0, 1)\}$ (a base canônica) e $\gamma = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)\}$, calcule $[I]^\beta_\gamma$ e $[I]^\gamma_\beta$. Calcule também $[u]_\beta$ e $[u]_\gamma$ para o vetor $u = (-1, 2)$.

4. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(3, 2, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0)$.

5. Para a transformação T dada na questão **4**, determine uma matriz A tal que $T(x) = A[x]_\beta$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^3$, onde β é a base $\{(3,2,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. ($[x]_\beta$ denota as coordenadas de x em relação à base β.)
Nota: O aluno pode resolver esta questão sem ter resolvido a questão 4.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1

a) Falsa. **(Nenhum ponto até aqui.)**
Sabemos que a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3 ($\{(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ - a *base canônica*) **(0,25 pontos até aqui)**
e a dimensão de um espaço vetorial é, por definição, o número de vetores de uma base (qualquer) do espaço (o número de vetores de uma base independe da base). **(+ 0,25 pontos)**

b) Falsa. **(Nenhum ponto até aqui.)**
Vários axiomas da definição de um espaço vetorial não são satisfeitos, por exemplo (o aluno tem que citar pelos menos um e comprovar que o mesmo não é satisfeito), para $p(x) = 1 + 0x \equiv 1$ não vale que $1\,p(x) = p(x)$.
(0,25 pontos até aqui)
De fato, pela definição do produto dada, temos que $1\,p(x) = 1\,x \equiv x$, e $x \neq p(x)$. **(+ 0,25 pontos)**

c) e **d)**: Também são afirmações falsas. **(Nenhum ponto até aqui.)**
Por exemplo, o vetor nulo - a origem $(0,0)$ - não pertence a estes espaços.
(0,25 pontos até aqui)
Sabemos que todo espaço vetorial contém o vetor nulo. **(+ 0,25 pontos)**

Questão 2.

Uma base de um espaço vetorial é um subconjunto linearmente independente do espaço e que gera o mesmo.

Para comprovarmos que o conjunto dado de vetores (elementos) do $\mathbb{R}^4$ são linearmente independentes basta verificarmos que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(da matriz com as linhas constituída dos vetores dados) é não nulo.

(0,5 pontos até aqui)

Desenvolvendo este determinando por cofatores em relação a segunda linha, temos:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

logo, os vetores dados são linearmente independentes. **(+ 0,5 pontos)**

O conjunto dado gera o $\mathbb{R}^4$ se, e somente se, a equação

$$x(1,1,1,1) + y(1,0,0,0) + z(0,2,0,1) + w(0,0,0,-1) = (a,b,c,d)$$

tem solução (x,y,z,w) para qualquer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, ou seja, se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y = & a \\ x + 2z = & b \\ x = & c \\ x + z - w = & d \end{cases}$$

tem solução, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **(+ 0,5)**

Como a matriz deste sistema é justamente a matriz cujo determinante vimos acima ser não nulo, este fato se verifica. **(+ 0,5)**

Questão 3.

A matriz $[I]_\gamma^\beta$ é obtida tomando-se os vetores da base β e calculando as suas coordenadas em relação à base γ, as quais constituem as colunas da matriz. **(0,5 pontos até aqui)**

Denotando os vetores das bases β e γ (na ordem dada), respectivamente, por u_1, u_2 e v_1, v_2, temos (as contam devem constar na prova):

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 \ \text{ e } \ u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2,$$

logo,

$$[u_1]_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \ \text{ e } \ [u_2]_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Então

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(+ 0,5)

Analogamente, podemos calcular $[I]_\beta^\gamma$, ou:

$$[I]_\beta^\gamma = ([I]_\gamma^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(+ 0,5)

Quanto a $[u]_\beta$ e $[u]_\gamma$ para o vetor $u = (-1, 2)$, temos:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\beta \text{ é a base canônica})$$

e

$$[u]_\gamma = [I]_\gamma^\beta [u]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(+ 0,5)

Questão 4.

Notemos que os vetores $(3,2,1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$. De fato, a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3 e ele são linearmente independentes, pois o determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

(da matriz cujas linhas são esse vetores) é não nulo. **(0,3 pontos até aqui)** Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ (qualquer), determinemos as suas coordenadas (x,y,z) em relação a esta base:

$$x(3,2,1) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} 3x = a \\ 2x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$$

$$x = a/3, \quad y = b - 2a/3, \quad z = c - a/3\,.$$

(+ 0,7)

Daí, pela linearidade de T e pelos valores dados, temos:

$$\begin{aligned} T(a,b,c) = &\ T(\tfrac{a}{3}(3,2,1) + (b - \tfrac{2a}{3})(0,1,0) + (c - \tfrac{a}{3})(0,0,1)) \\ = &\ \tfrac{a}{3}T(3,2,1) + (b - \tfrac{2a}{3})T(0,1,0) + (c - \tfrac{a}{3})T(0,0,1) \\ = &\ \tfrac{a}{3}(1,1) + (b - \tfrac{2a}{3})(0,-2) + (c - \tfrac{a}{3})(0,0) \\ = &\ (\tfrac{a}{3}, \tfrac{a}{3} - 2(b - \tfrac{2a}{3})) \\ = &\ (\tfrac{a}{3}, \tfrac{5a}{3} - 2b). \end{aligned}$$

Com a notação usual (x, y, z no lugar de a, b, c):

$$T(x,y,z) = (\frac{x}{3}, \frac{5x}{3} - 2y).$$

(+ 1,0)

Questão 5.

Tomando x igual aos vetores da base β dada, pela equação $T(x) = A[x]_\beta$ e pelos valores dados de T nestes vetores, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1,0 ponto até aqui)

Mas os lados direitos destas três equações são as colunas da matriz A (a primeira, a segunda e a terceira, respectivamente - produto de uma matriz por um vetor de uma base canônica) logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(+ 1,0)