DM–IMECC–UNICAMP
Geometria Analítica e Vetores - MA141 - Turma Z
Prof. Marcelo M. Santos
1a. prova, 08/04/2009
Aluno: ____________________________ RA: ____________
Assinatura: _________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min;*
Justifique sucintamente todas as suas afirmações.;
Cada questão vale 2,5 pontos.

1. Usando o método de escalonamento de Gauss-Jordan resolva o sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z + w &= 2 \\ x + z - w &= -1 \\ y - 3w &= 4 \end{cases}$$

Descreva (matematicamente) o conjunto solução.

2. Usando o processo de linha equivalência (escalonamento) calcule a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Suponha que os números a, b e c (arbitrários) sejam diferentes entre si. Usando o processo de linha equivalência transforme a matriz em uma matriz triangular superior, i.e. numa matriz (a_{ij}) tal que $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, e calcule o seu determinante. O que ocorre se dois dos números forem iguais?

4. Seja A uma matriz 3×3 cujas colunas são vetores unitários e ortogonais entre si. Prove que A é invertível e $A^{-1} = A^t$.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão1. Matriz do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

0,25 pontos até aqui.

Matriz aumentada:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

\+ **0,25 pontos** até aqui.

Fazendo operações elementares com as linhas de $(A|B)$ (devem constar na prova) chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4/3 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & | & -7/3 \end{pmatrix}.$$

\+ **1,25 pontos**

Logo, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3}w & = & \frac{4}{3} \\ y - 3w & = & 4 \\ z + \frac{1}{3}w & = & -\frac{7}{3} \end{cases}$$

\+ **0,25 pontos**

Pondo as variáveis com pivôs, x, y, z, em termo da variável livre (sem pivô), obtemos

$$\begin{cases} x = & \frac{4}{3}w + \frac{4}{3} \\ y = & 3w + 4 \\ z = & -\frac{1}{3}w - \frac{7}{3} \end{cases}$$

O conjunto solução é então

$$\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ; \text{valem as equações acima}\}$$

ou seja, o seguinte conjunto de matrizes colunas

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 4 \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 3 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} ; w \text{ é um escalar qualquer} \right\}.$$

+ 0,5 pontos

Questão 2. Consideramos a matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0,25 pontos

Fazendo operações elementares com as linhas desta matriz (devem constar na prova) chegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 2 & 4 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

+ 2,0 pontos

Logo, a inversa da matriz dada é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

+ 0,25 pontos

Questão 3. *Considere a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Suponha que os números a, b e c (arbitrários) sejam diferentes entre si. Usando o processo de linha equivalência transforme a matriz em uma matriz triangular superior, i.e. numa matriz (a_{ij}) tal que $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, e calcule o seu determinante. O que ocorre se dois dos números forem iguais?

Façamos as seguintes operações sobre as linhas da matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{L^2 \text{ `='}\, L_2 - L_1 \\ L_3 \text{ `='}\, L_3 - L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L^2 \text{ `='}\, L_2/(b-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L^3 \text{ `='}\, L_3 - (c-a)L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$

0,8 pontos

Calculando o determinante com as operações acima, temos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

1,5 pontos

Se dois números forem iguais o determinante é igual a zero, pois neste caso a matriz tem duas linhas iguais. **0,3 pontos**

Questão 4. Denotando as colunas da matriz por C_1, C_2, C_3, temos:

$$
\begin{aligned}
A^tA &= \begin{pmatrix} C_1^t \\ C_2^t \\ C_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_1 \cdot C_1 & C_1 \cdot C_2 & C_1 \cdot C_3 \\ C_2 \cdot C_1 & C_2 \cdot C_2 & C_2 \cdot C_3 \\ C_3 \cdot C_1 & C_3 \cdot C_2 & C_3 \cdot C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ||C_1||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||C_2||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||C_3||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,,
\end{aligned}
$$

2,0 pontos

logo, a matriz A é invertível e a sua inversa é A^t.

0,5 pontos