Exame de MA141 – Turma Y — 14/07/2015

Gabarito/pontuação – Turma Y

Questão 1. 1. (3 pt) *Consideramos o sistema linear*

$$\left[\begin{array}{rcl} qx + y + z & = & 1 \\ x + y + qz & = & 1 \\ x + qy + z & = & 1 \end{array}\right.,$$

com 3 equações e 3 variáveis. **Usando o método de Gauss-Jordan** (***operações elementares***) *determinar os valores de q para os quais o sistema tem*:

a) *Solução única*;
b) *Várias soluções*;
c) *Nenhuma solução.*

Resolução:

A matriz aumentada do sistema é a matriz

$$(A|B) = \begin{pmatrix} q & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & q & | & 1 \\ 1 & q & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Permutando a 1a linha com a 2a, subtraindo da 2a linha q vezes a 1a e da 3a a 1a, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & q & | & 1 \\ 0 & 1-q & 1-q^2 & | & 1-q \\ 0 & q-1 & 1-q & | & 0 \end{pmatrix}.$$

0,5 pontos até aqui

Caso $q = 1$: ficamos com a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

logo o sistema tem várias soluções (há colunas sem pivôs). + **0,6 pontos**

Caso $q \neq 1$: somando a 2a linha à 3a e notando que $2-q-q^2 = (1-q)(2+q)$, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & q & | & 1 \\ 0 & 1-q & 1-q^2 & | & 1-q \\ 0 & 0 & (1-q)(2+q) & | & 1-q \end{pmatrix}.$$

+ 0,4 pontos

Dividindo a 2a e a 3a linhas por $1-q$, obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & q & 1 \\ 0 & 1 & 1+q & 1 \\ 0 & 0 & 2+q & 1 \end{array}\right).$$

+ 0,2

Caso $q=-2$: a terceira linha é da forma $[0\ 0\ 0\,|\,k]$ com $k \neq 0$ $(k=1)$, logo o sistema não tem solução. **+ 0,6**

Caso $q \neq -2$: o determinante da matriz principal acima é $2+q$ (a matriz é triangular), é diferente de zero, logo, neste caso, o determinante da matriz do sistema também é diferente de zero, pois essas duas matrizes são equivalentes por linhas, portanto, a solução do sistema é única. **+ 0,7**

Questão 2. (1 pt) **Usando o método de Gauss-Jordan (*operações elementares*)** *calcular a inversa da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,2

Substituindo a 1a e a 3a linhas por estas menos a 2a, obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

+ 0,6

$$= (I|A^{-1})$$

+ 0,2

Questão 3. (3 pt) *As retas* r *e* l *são dadas por:* $r\colon\ x = \frac{y}{2} = 1 - z;$ $\quad l$ *que passa pelos pontos* $(0,1,0)$ *e* $(0,0,2)$.

a) (0,5 pt) *Mostrar que* r *e* l *são reversas.*

Resolução:

Os vetores $v_r = (1,2,-1)$ e $v_l = (0,0,2) - (0,1,0) = (0,-1,2)$ são paralelos às retas r e l, respectivamente; **0,1**

Os pontos $A = (0,0,1)$ e $B = (0,1,0)$ pertencem s retas r e l, respectivamente. **+0,1**

Verifiquemos se os vetores $\vec{AB} = (0,1,-1)$, v_r e v_l são coplanares:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 - 2 \neq 0$$

\+ **0,3**

logo, os vetores não são coplanares. Portantos as retas são reversas.

b)(1 pt) *Encontrar os planos* π *e* α *tais que:* $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ *e* π *é paralelo a* α.

Vetor normal aos planos (paralelos):

$N = v_r \times v_l = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3,-2,-1).$ **0,4**

Logo, as equações dos planos são da forma

$3x - 2y - z + d_1 = 0$ e $3x - 2y - z + d_2 = 0$ + **0,3**

Para determinar d_1 e d_2 substituímos e.g. o ponto $A = (0,0,1)$ numa equação e o ponto $B = (0,1,0)$ na outra, obtendo $-1 + d_1 = 0 \therefore d_1 = 1$ e $-2 + d_2 = 0$ $\therefore d_2 = 2$. + **0,3**

Portanto, as equações dos planos são $3x - 2y - z + 1 = 0$ e $3x - 2y - z + 2 = 0$.

c) (0,5 pt) *Encontrar a distância entre os planos* π *e* α *do item anterior.*

$\operatorname{dist}(\pi, \alpha) = \frac{|\vec{AB} \cdot N|}{\|N\|}$ **0,2**

$= \frac{|(0,1,-1)\cdot(3,-2,-1)|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{|0-2+1|}{\sqrt{14}} = 1/\sqrt{14}.$ + **0,3**

d) (1 pt) *Encontrar os pontos P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.*

$P \in r \Rightarrow P = (x, 2x, 1-x)$ **0,2**

$Q \in l \Rightarrow Q = B + tv_l = (0,1,0) + t(0,-1,2) = (0, 1-t, 2t)$ + **0,2**

$\vec{PQ} = sN, \; N = (3,-2,-1)$ + **0,2**

logo, temos o sistema

$$\begin{cases} -x &= 3s \\ 1-t-2x &= -2s \\ 2t-1+x &= -s \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} -3s-x &= 0 \\ 2s-t-2x &= -1 \\ s+2t+x &= 1 \end{cases}$$

+ **0,2**

Resolvendo-o, temos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_1 + 3L_3}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3}{=\!=}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{6}L_1}{=\!=}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_2 + 5L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_3}{=\!=}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\overset{L_2 \leftrightarrow -\frac{3}{7}L_2}{=\!=}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/14 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3}{=\!=}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/14 \\ 0 & 1 & 0 & 5/14 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right)$$

+ **0,2**

$$s = -1/14, \quad t = 5/14, \quad x = 3/4$$

$$\therefore \quad P = (3/4, 3/2, 1/4)) \quad \text{e} \quad Q = (0, 1 - \frac{5}{14}, 2\frac{5}{14}) = (0, 9/14, 5/7)$$

Questão 3. (3 pt) *Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem*

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0.$$

a) (0,5 pt) *Identificar a cônica ℓ.*

Resolução:

$ac - b^2/4 = 5 \times 5 - 6^2/4 = 16 > 0$, logo, a cônica é uma elipse, um ponto, ou o conjunto vazio. **0,3**

Tomando $y = 0$, obtemos a equação $5x^2 - 30\sqrt{2}x + 82 = 0$ que tem duas raízes distintas, pois $\Delta = (30\sqrt{2})^2 - 4 \times 5 \times 82 \; = 18 \times 10^2 - 164 \times 10 = (18 - 16,4) \times 10^2 > 0$, logo, a cônica não é um ponto nem o conjunto vazio. Portanto, é uma elipse. **+ 0,2**

b) (2,5 pt) *Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam ℓ à forma canônica.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

0,2

Autovalores: $|A - \lambda| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$5 - \lambda = \pm 3$$

$$\lambda = 5 \pm 3 = 2, \; 8$$

+ 0,3

Autovetores para $\lambda = 2$: $(A - 2)U = 0, \quad U = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a - b = 0$$

$$a = b$$

$$\therefore \; U = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\|U\|^2 = a^2(1^2 + 1^2) = 2a^2 \;\; \therefore \|U\| = 1 \Leftrightarrow |a|\sqrt{2} = 1,$ i.e. $a = \pm 1/\sqrt{2}$

Assim (pela teoria vista), temos que

$$U_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor diretor de um dos eixos, digamos x', de um novo sistema de coordenadas cartesinas x', y' no qual a equação da cônica não terá o termo $x'y'$.

+ 0,5

Para o vetor diretor do eixo y', sendo ele unitário e normal a U_1, podemos tomar

$$U_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

+ 0,3

As novas coordenadas $X' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ se relacionam com as coordenadas $X \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pela equação

$$X = QX', \qquad Q = [U_1 \; U_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

+ 0,3

e a equação da cônica nas variáveis x', y' é

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [-30\sqrt{2} \; 18\sqrt{2}]\tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X' + 82 = 0$$

i.e. $2(x')^2 + 8(y')^2 + [12 \; 48] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 82 = 0$

$2(x')^2 + 8(y')^2 + 12x' + 48y' + 82 = 0$ **+ 0,3**

Fazendo o completamento de quadrados, obtemos

$$2[(x')^2+6x'+9]-18+8[(y')^2+6y'+9]-72+82 = 0, \quad 2(x'+3)^2+8(y'+3)^2 = 8,$$

$$\boxed{\tfrac{(x'+3)^2}{4} + (y'+3)^2 = 1}$$

+ 0,3

logo, escrevendo $\bar{x} = x' - 1, \; \bar{y} = y' - 2$ (uma translação), obtemos a equação

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1$$

que é a elipse, na forma canônica nas variáveis $\bar{x}, \bar{y}$. **+ 0,3**