Questão 1.

$(1+|\xi|^2)^s|(\partial^\alpha f)\hat{}\,|^2 = (1+|\xi|^2)^s|(i\xi)^\alpha \hat{f}|^2 = (1+|\xi|^2)^s|i^{|\alpha|}\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}\hat{f}|^2$
$= (1+|\xi|^2)^s|\xi_1|^{2\alpha_1}\cdots|\xi_n|^{2\alpha_n}|\hat{f}|^2 \le (1+|\xi|^2)^s(1+|\xi|^2)^{\alpha_1}\cdots(1+|\xi|^2)^{\alpha_n}|\hat{f}|^2$
$\le (1+|\xi|^2)^s(1+|\xi|^2)^{|\alpha|}|\hat{f}|^2 \le (1+|\xi|^2)^{s+k}|\hat{f}|^2 \in L^1$, pois $f \in H^{s+k}$, logo, $\partial^\alpha f \in H^s$, e por estas contas também temos que
$\|\partial^\alpha f\|_{H^s}^2 = \int (1+|\xi|^2)^s|(\partial^\alpha f)\hat{}\,|^2 d\xi \le \text{const.}\|f\|_{H^{s+k}}^2$.

Por outro lado, como $s > n/2$ e tendo que $\partial^\alpha f \in H^s$, usando que $H^s \subset C_\infty$, com a inclusão contínua, daí também temos que $\partial^\alpha f \in C_\infty$ e
$\|\partial^\alpha f\|_{\sup} \le \text{const.}\|f\|_{H^{s+k}}$.

2. a) $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)), \quad \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s))$

b) $\mathbf{x} \equiv (\dot{x_1}, \dot{x_2}) = (z, 1), \quad \dot{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad z(s) = z^0 + s = \frac{1}{2}x_1^0 + s,$
$x_1(s) = x_1^0 + \int_0^s z(\tau)d\tau = x_1^0 + \int_0^s \left(\frac{1}{2}x_1^0 + \tau\right) d\tau = x_1^0(1+\frac{s}{2}) + \frac{s^2}{2},$
$x_2(s) = x_2^0 + s = x_1^0 + s \quad \Rightarrow \quad s = x_2 - x_1^0, \quad x_1 = x_1^0(1 + \frac{x_2 - x_1^0}{2}) + \frac{(x_2-x_1^0)^2}{2} =$
$x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1^0)(x_1^0 + x_2 - x_1^0) = x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1^0)x_2 = x_1^0(1 - x_2/2) + x_2^2/2$
$\Rightarrow \quad x_1^0 = (x_1 - x_2^2/2)/(1 - x_2/2), \quad s = x_2 - (x_1 - x_2^2/2)/(1-x_2/2),$
$u(x_1,x_2) = z(s) = x_1^0/2 + s = (x_1 - x_2^2/2)/2(1-x_2/2) + x_2 - (x_1 - x_2^2/2)/(1-x_2/2)$
$= \left[(x_1 - x_2^2/2) + 2x_2(1-x_2/2) - 2(x_1 - x_2^2/2)\right]/2(1-x_2/2)$
$= \left[x_1 - x_2^2/2 + 2x_2 - x_2^2 - 2x_1 + x_2^2\right]/(2-x_2) = (2x_2 - x_2^2/2 - x_1)/(2-x_2)$

$$u(x_1,x_2) = (4x_2 - x_2^2 - 2x_1)/2(2-x_2)$$

3. V. livro-texto [Iório].

4. a) $H_0 f = \lambda f \Rightarrow |\xi|^2\hat{f} = \lambda\hat{f} \Rightarrow (|\xi|^2 - \lambda)\hat{f} = 0 \Rightarrow \hat{f}(\xi) = 0$ se $|\xi|^2 \ne \lambda \Rightarrow \hat{f} = 0$ q.t.p. $\Rightarrow f = 0$ q.t.p. (onde usamos que a transformada de Fourier é uma bijeção do L^2 em L^2; v. Teorema de Plancherel), logo, H_0 não tem autofunções em L^2.

b) $-\Delta\varphi_\xi = |\xi|^2\varphi_\xi$. Além disso, $\varphi_\xi \in \mathcal{S}'$, pois $\varphi_\xi \in L^\infty$ ($|\varphi_\xi| \equiv 1|$) e $L^p \subset \mathcal{S}'$ ($1 \le p \le \infty$); v. livro-texto. Então qualquer função φ_ξ é uma autofunção do $-\Delta$ em $\mathcal{S}'$.