

**Questão 1**

(a): Pelo teste da razão, devemos ter,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \frac{n5^n}{|x-3|^n} = \frac{|x-3|}{5} < 1,$$

ou seja,  $|x-3| < 5$ . Assim a série converge para  $-2 < x < 8$ .

**Até aqui, vale 0,6 pontos.**

Para  $x = -2$ , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty.$$

**+0,2**

Para  $x = 8$ , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

**+0,2**

Portanto o intervalo procurado é  $[-2, 8)$

(b): Reescrevendo  $f$ :

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(x-1)}$$

**+0,5**

Comparando com a série geométrica

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

**+0,5**

---

**Questão 2**

(a): Temos que  $P(x) = 4 + x^2$ , assim  $P(0) = 4 \neq 0$ , portanto  $x = 0$  é um ponto ordinário.

+0,3

(b): Seja  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , temos

$$\begin{aligned}(4 + x^2)y'' - 2y &= (4 + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) - 2)a_n]x^n = 0.\end{aligned}$$

Observando que  $n(n-1) - 2 = (n-2)(n+1)$ , podemos concluir que

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)}{4(n+2)}a_n \quad (\text{relação de recorrência}).$$

+0,7

(c): Temos:

$$\begin{aligned}n=0 &\Rightarrow a_2 = -\frac{-2}{4 \cdot 2}a_0 = \frac{a_0}{4} \\n=1 &\Rightarrow a_3 = -\frac{-1}{4 \cdot 3}a_1 = \frac{1}{4 \cdot 3}a_1 \\n=2 &\Rightarrow a_4 = -\frac{0}{4 \cdot 4}a_0 = 0 \\n=3 &\Rightarrow a_5 = -\frac{1}{4 \cdot 5}a_3 = -\frac{1}{4 \cdot 5} \frac{1}{4 \cdot 3}a_1 = -\frac{1}{4^2 \cdot 5 \cdot 3}a_1 \\n=4 &\Rightarrow a_6 = -\frac{4}{4 \cdot 6}a_4 = 0 \\n=5 &\Rightarrow a_7 = -\frac{3}{4 \cdot 7}a_5 = \frac{3}{4 \cdot 7} \frac{1}{4^2 \cdot 5 \cdot 3}a_1 = \frac{1}{4^3 \cdot 7 \cdot 5}a_1 \\n=7 &\Rightarrow a_9 = -\frac{5}{4 \cdot 9}a_7 = -\frac{5}{4 \cdot 9} \frac{1}{4^3 \cdot 7 \cdot 5}a_1 = \frac{1}{4^4 \cdot 9 \cdot 7}a_1\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$n = 2k \Rightarrow a_{2k} = 0 \quad \forall k \geq 1,$$

+0,3

$$n = 2k + 1 \Rightarrow a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)} a_1 \quad \forall k \geq 1.$$

+0,4

(d): Solução geral:

$$y = a_0 \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + a_1 \left( x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1} \right).$$

Se  $y(0) = 4 = a_0$  e  $y'(0) = 5 = a_1$  temos

$$y = 4 \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + 5 \left( x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1} \right).$$

+0,3

### Questão 3

(a): Observe que  $x = 2$  é um ponto ordinário, portanto a solução geral tem a forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n.$$

Até aqui, vale 0,5 pontos (só a fórmula sem justificativa, vale 0,3 pontos).

(b): Temos que  $P(x) = 6x^2$  cuja única raiz é  $x = 0$ , portanto o raio mínimo é a distância de 2 até 0, que é igual a 2.

+0,5

(c): Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{7x}{6x^2} = \frac{7}{6},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-(x^2+2)}{6x^2} = -\frac{1}{3},$$

assim  $x = 0$  é um ponto singular regular.

Equação indicial:

$$0 = r(r-1) + \frac{7}{6}r - \frac{1}{3} = r^2 + \frac{1}{6}r - \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \text{ e } r_2 = -\frac{2}{3}.$$

Como  $r_1 - r_2 = 7/6$  não é um natural, temos:

$$y_1 = |x|^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1/2) x^n \right) \quad e \quad y_2 = |x|^{-\frac{2}{3}} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-2/3) x^n \right).$$

**+0,5**

**(d):** Como  $x \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{7}{6}$  e  $x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{-(x^2+2)}{6}$  são polinômios, e portanto como séries de potência convergem para todo  $x$ , temos que  $y_1$  converge para todo  $x$  e  $y_2$  converge para todo  $x \neq 0$ .

**+0,5**

#### Questão 4

**(a):** Todo correto, vale **0,3 pontos**.

**(b):** Fórmula dos coeficientes de Fourier em senos correta, e.g.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

onde  $L = 2$ , vale **0,5 pontos**.

$$b_n = \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

**+ 0,4**

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right)$$

**+ 0,4**

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 4k \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 4k + 1 \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 4k + 2 \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

**+ 0,2**

Conclusão: A série de Fourier é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(4k+1)\pi} \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}x\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(4k+2)\pi} \sin\left(\frac{(4k+2)\pi}{2}x\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(4k+3)\pi} \sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2}x\right)$$

**+ 0,2.**

---

**Questão 5**

1. Se  $y(x, t) = X(x)T(t)$  é tal que  $4T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$  então

$$4 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (\lambda = \text{constante}).$$

Assim

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad e \quad T''(t) + \frac{\lambda}{4}T(t) = 0.$$

+0,5

2. Temos que

$$y(0, t) = 0 \quad e \quad y(\pi, t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0, \quad e \\ y(x, 0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0.$$

Portanto,  $X$  e  $T$  devem satisfazer

$$(1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad e \quad (2) \begin{cases} T''(t) + \frac{\lambda}{4}T(t) = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

+0,5

As soluções de (1) são  $\lambda_n = n^2$  e  $X_n(x) = a \sin(nx)$  para todo  $n \geq 0$ .

As soluções de (2) são, para  $\lambda = n^2$ ,  $T_n(t) = b \sin(\frac{n}{2}t)$ .

Temos que  $y_n(x, t) = \sin(nx) \sin(\frac{n}{2}t)$  é solução de

$$\begin{cases} 4y_{tt} = y_{xx} \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \\ y(x, 0) = 0 \end{cases}$$

+0,5

Seja

$$y(x, t) = \sum_{n=0} c_n y_n(x, t) = \sum_{n=0} c_n \sin(nx) \sin(\frac{n}{2}t),$$

temos que

$$y_t(x, 0) = \sum_{n=0} \frac{n}{2} c_n \sin(nx).$$

Por outro lado, queremos que  $y_t(x, 0) = \frac{1}{10} \sin x$ . Basta escolhermos  $c_n = 0 \quad \forall n \neq 1$  e  $c_1 = 1/5$ .

Então nossa solução é

$$y(x, t) = \frac{1}{5} \sin(x) \sin(\frac{t}{2}).$$

+0,5