DM–IMECC–UNICAMP, Geometria Analítica e Vetores - MA141 - Turma Z, Prof. Marcelo M. Santos

Exame Final, 15/07/2009

Aluno: ____________________ **RA:**__________ **Ass.:** ____________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações*; ***Disponha as suas resoluções das questões nas folhas em branco em ordem crescente e use somente uma folha em branco (frente e verso) para cada questão.*** *A última folha pode ser usada para rascunho.*

Proibido usar calculadora. Não desgrampear a prova. Desligar o celular.

Escolha 5 (cinco), e somente cinco, questões.

Cada questão vale 2,0 pontos.

1. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 5x + y + (a^2 - 1)z &= a + 1\,. \end{cases}$$

Para que valores de a o sistema

a) admite uma solução única?

b) admite um conjunto solução com uma única variável livre?

c) admite um conjunto solução com exatamente duas variáveis livres?

d) é impossível (não admite solução)?

2. Considere as retas $r: \; x = 0, y - 2 = z - 1; \quad s: x = 2 + t, y = 3, z = -1 + t$.

a) Determine a posição relativa entre r e s (paralelas, reversas ou concorrentes).

b) Calcule a distância entre r e s.

3. Encontrar a equação do plano que passa pelo ponto $P = (2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z = 0$ e $2x - y + 4z = 1$.

4. **a)** Escreva a cônica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ na forma matricial $X^tAX + KX = 0$ (*0,25 pontos*).

b) Determine os autovalores ($\det(A - \lambda) = 0$) e autovetores ($(A - \lambda)X = 0$) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (*0,25 pontos*).

c) Determine um sistema de coordenadas cartesianas $x'y'$ em relação ao qual a cônica acima se escreve como $a(x')^2 + b(y')^2 + c = 0$; mostre como chegar nesta equação (*1,25 pontos*). Identifique a cônica (*0,25 pontos*) .

5. Considere a cônica dada pela equação $r = \frac{3}{2+\cos\theta}$ em coordenadas polares. Determine a excentricidade, as coordenadadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s), e as equações em coordenadas cartesianas da cônica e da sua reta diretriz.

6. Identifique a quádrica e faça um esboço do seu gráfico:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; **b)** $x^2 - 4z^2 = 4$;

c) $x = \dfrac{z^2}{4} - y^2$; **d)** $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

7. Verifique se as afimações abaixo são verdadeiras ou falsas. No caso verdadeiro, prove, e no caso falso, dê um contra-exemplo.

a) Sejam u, v, w vetores. Se $u \cdot v = w \cdot v$ então $u = w$.

b) Um plano pode interceptar um elipsóide numa circunferência.

c) Se A é uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então A não é invertível.

d) Um sistema homogêneo de equações lineares sempre possui uma solução não nula.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. Matriz aumentada do sistema:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 3 & -1 & 5 & | & 2 \\ 5 & 1 & a^2-1 & | & a+1 \end{array}\right]$$

(0,1 pontos)

Redução à forma escalonada:

$-3L_1 + L_2 \text{ `}=\text{' } L_2, \quad -5L_1 + L_3 \text{ `}=\text{' } L_3$:

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & -7 & 14 & | & -10 \\ 0 & -9 & a^2+14 & | & a-19 \end{array}\right]$$

(0,1 pontos)

$-\frac{1}{7}L_2 \text{ `}=\text{' } L_2$:

$$\to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{7} \\ 0 & -9 & a^2+14 & | & a-19 \end{array}\right]$$

(0,1 pontos)

$-2L_2 + L_1 \text{ `}=\text{' } L_1, \quad 9L_2 + L_3 \text{ `}=\text{' } L_3$:

$$\to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-4 & | & a-\frac{43}{7} \end{array}\right]$$

(0,1 pontos)

a) Sendo A a matriz so sistema, pelos cálculos acima temos que $\det A = a^2 - 4$, logo, o sistema admite solução única, quando $a^2 - 4 \neq 0$, i.e. $a \neq \pm 2$.

(0,4 pontos)

b) Se $a^2 = 2$, a matriz aumentada do sistema é linha equivalente à

$$\to \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & \pm 2-\frac{43}{7} \end{array}\right]$$

e como, $\pm 2 - \frac{43}{7} \neq 0$, temos que o sistema é impossível. Portanto, ou o sistema admite solução única (quando $a = \pm 2$) ou é impossível (quando $a \neq \pm 2$). Logo, a resposta do item **b)** é: *para nenhum valor de a.* **(0,4 pontos)**

Analogamente, a resposta do item **c)** também é: *para nenhum valor de a.* **(0,4 pontos)**

d) $a = \pm 2$; v. **b)**. **(0,4 pontos)**

Questão 2. Pelas formas das equações dadas, vemos que vetores paralelos às retas são, respectivamente, $u = (0,1,1) \,//\, r$ e $v = (1,0,1) \,//\, s$, e pontos pertencentes às mesmas são $P_1 = (0,2,1) \in r$ e $P_2 = (2,3,-1) \in s$. **(0,4 pontos)**

a) Calculando $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (u \times v) = \det[\overrightarrow{P_1P_2}\ u\ v]$, com o desenvolvimento do determinante pela segunda coluna da matriz, temos:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (2+2) - (-1) = 5.$$

Como $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (u \times v) \neq 0$, concluimos que as retas são reversas. **(0,8 pontos)**

b) Pela fórmula da distância d entre retas reversas, temos: $d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (u \times v)|}{\|u \times v\|}$. **(0,2 pontos)**

Calculamos acima $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (u \times v) = 5$ **(0,2 pontos)**
e

$$u \times v = (0,1,1) \times (1,0,1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1,1,-1),$$

(0,2 pontos)

donde, $\| u \times v \| = \sqrt{3}$. Logo, $d = 5/\sqrt{3}$. **(0,2 pontos)**

Questão 3. Se o plano é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z = 0$ e $2x - y + 4z = 1$, então ele é paralelo aos vetores normais dos mesmos, $N_1 = (1,2,-3)$ e $N_2 = (2,-1,4)$. **(0,5 pontos)**

Daí, um vetor normal ao plano pedido é

$$\begin{aligned} N &= N_1 \times N_2 = (1,2,-3) \times (2,-1,4) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5,-10,-5). \end{aligned}$$

(0,5 pontos)

Logo, a equação do plano é da forma

$$5x - 10y - 5z + d = 0.$$

(0,5 pontos)

Como o plano passa pelo ponto $(2,1,0)$, substituindo suas coordenadas na equação acima, obtemos

$$10 - 10 + d = 0,$$

logo, $d = 0$. **(0,5 pontos)**

Questão 4. a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$K = [-2 \;\; -2]\,;$$

então

$$X^t A X + K X + 1 = 0.$$

Na prova consta $X^tAX + KX = 0$ *(sem o "1").* Por isso todos receberam **0,25 pontos** neste item.

b) e **c)** *Se o aluno calculou (corretamente) só os autovalores e autovetores, e não usou no item c), recebeu 0,25 pontos no item b).*

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0, \quad 1-\lambda = \pm 1, \quad \lambda = 0, 2.$$

Autovetores:

$\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 0, \quad x = y$$

$U_1 = (1,1)/\sqrt{2}$ é um autovetor normal associado ao autovalor $\lambda = 0$;

(+ **0,5 pontos** até aqui.)

$\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$-x - y = 0, \quad x = -y$$

$U_2 = (1,-1)/\sqrt{2}$ é um autovetor normal associado ao autovalor $\lambda = 2$;

(+ **0,25 pontos**)

<u>Novas coordenadas</u>:

$$X = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} X'$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}$$

(+ **0,75 pontos**.)

Substituindo estas relações na equação inicial, obtemos

$$0(x')^2 + (y')^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') + 1 = 0$$

$$(y')^2 - \sqrt{2}x' + 1 = 0.$$

(+ **0,5 pontos**)

A cônica é uma parábola. (+ **0,25 pontos**)

Questão 5.

$$r = \frac{3/2}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{de}{1 + e\cos\theta}, \quad e = 1/2, d = 3;$$

(**0,6 pontos**)

(uma elipse com) diretriz $x = 3$ (em c.c.), excentricidade $1/2$ e foco $(0,0)$.

(**0,6 pontos**)

Os vértices ocorrem em $\theta = 0$, logo, $r = 1$ e em $\theta = \pi$, logo, $r = 3$, os quais em c.c. são $(1,0)$ e $(-3,0)$. (**0,3 pontos**.)

Equação em c.c. ($x = r\cos\theta, y = \text{sen}\theta$):

$$\begin{aligned}
&r(2+\cos\theta) = 3\\
&2r + r\cos\theta = 3\\
&2r + x = 3\\
&4r^2 = (3-x)^2\\
&4(x^2+y^2) = 9 - 6x + x^2\\
&3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \qquad\qquad (\textbf{ 0,5 pontos})
\end{aligned}$$

Questão 6.

Identificação da quádrica: **0,25 pontos**;
Esboço do gráfico: **0,25 pontos**.

a) esfera; **b)** cilindro hiperbólico, com 'eixo y';

c) Parabolóide hiperbólico, com 'eixo x';

d) hiperbolóide de duas folhas, com 'eixo x'.

Questão 7.

a) Falso (**0,1 pontos**). Um contra-exemplo: $u = (1,0)$, $v = w = (0,0)$. (**0,4 pontos**)

b) Verdadeiro (**0,1 pontos**). Prova: A interseção do elipsóide $x^2/4 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x = 0$ é a circunferência $y^2 + z^2 = 1$ no plano yz. (**0,4 pontos**)

c) Verdadeiro (**0,1 pontos**). Prova: $A^k = 0 \Rightarrow (\det A)^k = \det A^k = \det 0 = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ não é invertível. (**0,4 pontos**)

d) Falso (**0,1 pontos**). Um contra-exemplo: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. (**0,4 pontos**)