Análise 2 - MA602 Exame, 13/07/2015

Aluno: ____________________________ RA: ____________

1. Seja f uma função limitada em $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ tal que $f|[c, b]$ seja integrvel para todo $c \in (a, b)$. Mostre que f é integrável (em $[a, b]$) de duas maneiras:

a) (1,25) Usando o "critério de Riemann": para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$.

b) (1,25) Usando o teorema de "caracterização de funções integráveis": uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

2. a) (1,5) Sejam $\{r_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ enumerável e limitado, e $u_n(x) = \frac{1}{2^n}|x - r_n|$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ e mostre que a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x - r_n|$ é lipschitziana em $\mathbb{R}$ com constante de Lipschitz igual a um, i.e. $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

b) (1,0) Para a função definida no item **a)**, mostre que existe a derivada em todo ponto $a \notin \{r_n\}$. *<u>Sugestão</u>: Mostre que* $f'(a) = H(a)$, *onde* $H(a) = \sum_n (u_n)'(a)$.

3. (2,5) Enuncie e demonstre o Teorema de Aproximação de Weierstrass.

4. a) (1,0) Dê um exemplo de uma função não limitada com primitiva.

b) (0,5) Dê um exemplo de uma sequência de funções contínuas que não seja equicontínua.

b) (1,0) Enuncie o Teorema de Arzelà-Ascoli.

Boa prova!