Departamento de Matemática - UnB, 17/02/2012

Soluções estacionárias das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis com uma lei de potência, em domínios com fronteiras ilimitadas

Marcelo Santos
IMECC-UNICAMP

Gilberlandio Dias
UNIFAP

Tópicos desta palestra

- Breve dedução das equações de Navier-Stokes
- Descrição do problema e enunciado do teorema principal
- História e resultados relacionados
- Alguns pontos sobre as demonstrações
- Canais "curvos"- trabalho em andamento

Breve dedução das equações de Navier-Stokes

O teorema do transporte

Seja $\boldsymbol{v}(\cdot, t)$, $t \geq 0$, um campo de vetores num aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ exista uma única curva integral $\mathbf{X}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \boldsymbol{v}(\mathbf{X}(t), t), & t > 0 \\ \mathbf{X}(0) = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

Então para cada $\Omega_0 \subset \Omega$ podemos definir $\Omega_t = \mathbf{X}(\Omega_0, t)$ e vale o seguinte teorema:

Teorema do Transporte (TT). *Suponhamos que* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}^1(\Omega \times [0, \infty))$ *e seja* $f \in \mathrm{C}^1(\Omega \times [0, \infty)\,)$. *Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_t} [\frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}, t) + (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) f] d\boldsymbol{x} \equiv \int_{\Omega_t} [f_t + \operatorname{div}(f \boldsymbol{v})] d\boldsymbol{x}$$

onde $\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f \equiv \frac{d}{dt} f(\mathbf{X}(t), t)$ (derivada material).

Ver **e.g.** S. Toscano Melo e F. Moura-Neto, *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1991. Disponível em pdf na página http://www.ime.usp.br/~toscano/flu.pdf

Cont. Breve dedução das equações de Navier-Stokes

Incompressibilidade

A seguir consideramos um fluido em Ω com campo de velocidade $\boldsymbol{v}$ e densidade ρ suaves.
Supomos que o fluido é *incompressível* **(I)** i.e.

$$\int_{\Omega_t} d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_0} d\boldsymbol{x}, \quad \forall\, \Omega_t \subset \Omega,$$

donde,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} d\boldsymbol{x} = 0,$$

logo, pelo teorema do transporte (TT),

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

ou seja,

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0} \qquad \text{(equação de incompressibilidade).}$$

Cont. Breve dedução das equações de Navier-Stokes

Princípios físicos:

1) conservação de massa

$$\int_{\Omega_t} \rho(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_0} \rho(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x}$$

$$\iff \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 0$$

$$\overset{\textbf{(TT)}}{\iff} \quad \int_{\Omega_t} [\, \rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \,] d\boldsymbol{x} = 0$$

$$\iff \quad \boxed{\rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0} \qquad \text{(equação da continuidade)}$$

ou

$$\boxed{\rho_t + \boldsymbol{v} \cdot \rho = 0}$$

já que div $\boldsymbol{v} = 0$.

Cont. Breve dedução das equações de Navier-Stokes

Princípios físicos:

2) conservação de momemtum (2a. Lei de Newton)

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x},t)dt = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{int}}\, d\boldsymbol{x}$$

($\mathbf{f}_{\text{ext}}$ e $\mathbf{f}_{\text{int}}$ são densidades de forças externas e internas, respectivamente, atuando em Ω_t)

$$\overset{\textbf{(TT), (I)}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_{\Omega_t} \frac{D(\rho v_j)}{Dt} d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_t} f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}}\, d\boldsymbol{x}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

$(\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n),\ \mathbf{f}_{\text{ext}} = (f_1^{\text{e}}, \cdots, f_n^{\text{e}}),\ \mathbf{f}_{\text{int}} = (f_1^{\text{i}}, \cdots, f_n^{\text{i}})\ )$ logo

$$\begin{aligned}
(\rho v_j)_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\rho v_j) &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}} \\
\rho_t v_j + \rho(v_j)_t + \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\rho)v_j + \boldsymbol{v}\cdot\rho\nabla v_j &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}} \\
\underbrace{(\rho_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho)}_{\text{zero (eq. cont.)}} v_j + \rho(v_j)_t + \rho\ \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_j &= f_j^{\text{e}} + f_j^{\text{i}}
\end{aligned}$$

Em notação vetorial,

$$\boxed{\rho \boldsymbol{v}_t + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \mathrm{f}_{\mathrm{ext}} + \mathrm{f}_{\mathrm{int}}}$$

onde $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} := (\boldsymbol{v} \cdot \nabla v_1, \cdots, \boldsymbol{v} \cdot \nabla v_n) = (\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$.

Fazemos mais restrições (hipóteses): vamos tomar $\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$ da forma gradiente de alguma função escalar (força conservativa) e $\mathbf{f}_{int}$ da forma $\mathbf{f}_{int} = -\nabla \mathcal{P} +$ "termo viscoso" (modelo) onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\boldsymbol{x}, t)$ é a pressão do fluido no ponto $(\boldsymbol{x}, t)$

Incorporando $\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$ na notação de $\nabla \mathcal{P}$, obtemos assim o seguinte sistema de equações que modelam o fluido em Ω:

$$\begin{cases} \rho \boldsymbol{v}_t + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla \mathcal{P} = \text{“termo viscoso”} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \rho_t + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0\,. \end{cases}$$

(equações ou sistema de Navier-Stokes)

Em estado estacionário, i.e. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, independente do tempo t, temos

$$(NS)_E \qquad \begin{cases} \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla \mathcal{P} = \text{“termo viscoso”} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0\,. \end{cases}$$

Descrição do problema nesta palestra:

1) **as equações (o modelo)**

$$(NS)_p \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(|D(\boldsymbol{v})|^{p-2}D(\boldsymbol{v})) + (\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \nabla\mathcal{P} = 0 \\ \text{(equações de Navier-Stokes com uma lei de potência)} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \\ \text{(equação de incompressibilidade)} \end{cases}$$

$\mathcal{P}$: pressão

$\boldsymbol{v}$: velocidade, $\quad D(\boldsymbol{v}) = (\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^t)/2$

$(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$: termo convectivo

$|D(\boldsymbol{v})|^{p-2}D(\boldsymbol{v}) \;=:\; \mathbb{S}$ matriz de viscosidade (“viscous stress tensor”)

viscosidade $= |D(\boldsymbol{v})|^{p-2}$

lei de potência ou **lei de Ostwald-de Waele**

(um modelo para a viscosidade). Referências:

- W. Ostwald, *Koll1oid-Zeitschrift* 36, 1925; A. de Waele, *Oil Color Chem. Assoc. J.*, 6, 1923;
- R. Bird, W. Stewart and E. Lightfoof, *Transport Phenomena*, Johh Wiley & Sons, Inc. (2007).

“Transport Phenomena (book)”:

Wikipedia

“Transport Phenomena is the first textbook that is about transport phenomena. It is specifically designed for chemical engineering students. The first edition was published in 1960, two years after having been preliminarily published under the title Notes on Transport Phenomena based on mimeographed notes prepared for a chemical engineering course taught at the University of Wisconsin-Madison during the academic year 1957-1958. The second edition was published in August 2001. A revised second edition was published in 2007. This text is often known simply as BSL after its authors’ initials.”

Cont. as equações (o modelo):

O modelo acima $(NS)_p$ também é conhecido como **modelo da Ladyzhenskaya** ou **modelo de Smagorinsky**, devido aos trabalhos:

- Smagorinsky, J. S. *General circulation experiments with the primitive equations*. I. The basic experiment, Mon. Weather Rev., 91 (1963), 99–164.
- Ladyzhenskaya, O.A. *New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them*. Proc. Stek. Inst. Math. 102, 95–118 (1967)
- Ladyzhenskaya, O.A. *On some modifications of the Navier–Stokes equations for large gradients of velocity*. Zap. Nau¡cn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 7, 126–154 (1968)
- Ladyzhenskaya, O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

Um modelo relacionado, em que a viscosidade é dada por $|\boldsymbol{v}|^{p-2}$, em vez de $|D(\boldsymbol{v})|^{p-2}$, é dado em

- Lions, J.L. *Quelques Méthods de Resolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

Cont. as equações (o modelo):

$|D(v)|$: taxa de cisalhamento ("shear rate")

$p = 2$: fluidos Newtonianos (e.g. água, óleo)
$p < 2$: "*shear-thinning*" (ou plástico e pseudo-plástico, e.g. a maioria dos polímeros ("polymer melts and solutions")
- a viscosidade decresce com a taxa de cisalhamento

$p > 2$: "*shear-thickening*" (ou dilatante, e.g. lama, barro ("clay"), cimento)
- viscosidade cresce com a taxa de cisalhamento

V. e.g.

- E. Marusic-Paloka, *Steady Flow of a Non-Newtonian Fluid in Unbounded Channels and Pipes*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **10**(9) (2000).

Para fluidos paralelos, i.e. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \equiv v(\bar{x})\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x} = (\bar{x}, x') \equiv \bar{x} \oplus (x'\boldsymbol{e})$, o campo de velocidade $\boldsymbol{v}$ é dado por uma função escalar $v(\bar{x})$, o termo convectivo $(\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ se anula, e o sistema de Navier-Stokes torna-se a equação para o **p-Laplaciano**:

$$-\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = c$$

onde c é uma constante relacionada com "*queda de pressão*", i.e. $\nabla \mathcal{P} = -c\boldsymbol{e}$.

Descrição do problema/cont.:

2) **O domínio**

O fluido ocupa um conjunto aberto Ω do $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com uma fronteira C^∞, tal que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{2} \Omega_i \ ,$$

onde Ω_0 um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ e, em sistemas de coordenadas cartesianas distintas,

$$\Omega_1 = \{x = (\bar{x}, x') \in \mathbb{R}^n;\ x' < 0,\ \bar{x} \in \Sigma_1(x')\}$$

e

$$\Omega_2 = \{x = (\bar{x}, x') \in \mathbb{R}^n;\ x' > 0,\ \bar{x} \in \Sigma_2(x')\},$$

com $\Sigma_i(x')$, $i = 1, 2$, sendo conjuntos abertos C^∞ simplesmente conexos em $\mathbb{R}^{n-1}$ tais que

$$\sup_{x', i=1,2} \operatorname{diam} \Sigma_i(x') < \infty$$

e Ω_i, $i = 1, 2$, contém um cilindro

$$C_l^i = \{x \in \mathbb{R}^n;\ (-1)^i x' > 0 \text{ e } |\bar{x}| < l\}, \quad (l > 0)$$

(em particular, $\inf_{x', i=1,2} \operatorname{diam} \Sigma_i(x') > 0$).

Denotaremos por $\mathbf{n}$ o vetor ortonormal a $\Sigma \equiv \Sigma_i(x')$, ou a qualquer seção transversal de Ω, apontando de Ω_1 para Ω_2.

Descrição do problema/cont.:

3) O problema

Dado qualquer $\Phi \in \mathbb{R}$, encontrar uma solução $(\boldsymbol{v}, \mathcal{P})$ do sistema $(NS)_p$ tal que

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\,, \qquad \int_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = \Phi$$

e

$$\sup_{t>0} t^{-1} \int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{v}|^p < \infty\,,$$

onde $\Omega^t := \Omega_0 \cup \Omega_1^t \cup \Omega_2^t$, $\Omega_i^t := \{(\bar{x}, x') \in \Omega_i\,;\, 0 < (-1)^i x' < t\}$, $i = 1, 2$.

Caso $p = 2$ (fluido Newtoniano):
problema proposto por O. Ladyzhenskaya e V. Solonnikov – "*Problema 1.1*" em

- **[LS]** O.A. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov, *Determination of the Solutions of Boundary Value Problems for Steady-State Stokes and Navier-Stokes Equations in Domains Having an Unbounded Dirichlet Integral* (1980). English transl. in J. Soviet Math. **21** (1983).

Teorema (–, Gilberlandio Dias, J.D.E. 2012)

Let $p \geq 2$ e $n = 2, 3$. Então o problema acima tem uma solução generalizada, i.e. existe um par $(\boldsymbol{v}, \mathcal{P}) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \times L^{p'}_{loc}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, tal que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |D(\boldsymbol{v})|^{p-2} D(\boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\psi} = -\int_\Omega ((\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_\Omega \mathcal{P} \mathrm{div} \boldsymbol{\psi}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ \boldsymbol{\psi} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ \displaystyle\int_\Omega v \cdot \nabla \psi = 0\,, \qquad \forall\ \psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \end{cases}$$

(*as equações em* $(NS)_p$ *são satisfeitas no sentido das distribuições*),

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\,,$$
$$\int_\Sigma \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = \Phi, \qquad \text{e}$$
$$\sup_{t>0} t^{-1} \int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{v}|^p < \infty\,.$$

Obs.: Caso $p = 2$: resultado devido a Ladyzhenskaya e Solonnikov [LS]

História e resultados relacionados

O problema de Leray

Seja $\boldsymbol{v}_P(x) = v_P(\bar{x})\boldsymbol{e}$ o campo de velocidade paralelo de um fluido Newtoniano ($p = 2$) em um cilindro reto ilimitado

$$C = \{(\bar{x}, x') \equiv \bar{x} \oplus (x'\boldsymbol{e})\,;\ \ \bar{x} \in \Sigma,\ \ 0 < |x'| < \infty\},$$

(aqui Σ é independente de x') tal que $v_P\big|\partial\Sigma = 0$, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta v_P = c & \text{in } \Sigma \\ \quad\ v_P = 0 & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases}$$

O campo $\boldsymbol{v}_P$ é conhecido como **campo de Poiseuille**.

Observação: A constante c pode ser determinada pelo fluxo $\Phi = \int_\Sigma v_P$. De fato, seja v_1 a solução correspondente a $c = 1$. Então, $v_P = cv_1$ e

$$\Phi = c\int_\Sigma v_1 = c\int_\Sigma (-\Delta v_1)v_1 = c\int_\Sigma |\nabla v_1|^2.$$

Logo, $c = \Phi / \int_\Sigma |\nabla v_1|^2$.

Problema de Leray: continuação

Suponhamos que Ω_i, $i = 1, 2$, sejam cilindros retos e seja $\boldsymbol{v}_P^i$ o campo de Poiseuille em Ω_i. Então, o **problema de Leray** é o seguinte problema:

Encontrar uma solução $(\boldsymbol{v}, \mathcal{P})$ *do sistema* $(NS)_2$ *tal que* $\boldsymbol{v}\Big|\partial\Omega = 0$ *e*

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_P^i \ \text{ as } \ |x'| \to \infty \ \text{ in } \ \Omega_i.$$

O problema de Leray foi proposto (?) por J. Leray a O. Ladyzhenskaya, cf.

- [Amick] C.J. Amick, *Steady solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded channels and pipes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci., **4**(3) (1977)

onde se pode ler:
"This problem was proposed (I believe) by Leray to Ladyzhenskaya, who in [7] attempted an existence proof under no restrictions on the [constant] viscosity ν. The problem is also mentioned by Finn in a review paper ([3], p. 150)."

- [7] O. A. Ladyzhenskaya, *Stationary motion of a viscous incompressible fluid in a pipe*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **124** (1959).
- [3] R. Finn, *Stationary solutions of the Navier-Stokes equations*, Amer. Math. Soc., Proc. Symposia Appl. Math., **17** (1965).

Teorema de Amick

Teorema de Amick [Amick], 1977: *O problema de Leray (para fluidos Newtonianos) ($p = 2$) tem uma solução, se o fluxo for suficientemente pequeno.*

Fluxo arbitrário: questão em aberto.

Teorema de Ladyzhenskaya-Solonnikov

Teorema de Ladyzhenskaya-Solonnikov [LS], 1980: *Dado qualquer fluxo* ($\Phi \in \mathbb{R}$), *"o problema de Ladyzhenskaya-Solonnikov" (para fluidos Newtonianos) tem uma solução*.

Outros resultados relacionados

Vários outros autores estudaram fluidos Newtonianos em domínios com fronteira ilimitada, incluindo seções transversais ilimitadas, e.g.

- K. Pileckas, Nazarov, Kapitanskii, ... Escola de São Petersburgo
- G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory o f the Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag (1994).
- –, F. Ammar-Khodja: problemas de Leray e Ladyzhenskaya-Solonnikov para fluidos Newtonianos em 2D com densidade variável;
  Methods Appl. Anal. **13** (2006)
  Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **66** (2006).
- Fábio V. Silva (**IME-UFG**): fluidos micropolares;
  J. Math. Anal. Appl. **306**(2) (2005)
  Nonlinear Anal. **64**(4) (2006)

Resultados para fluidos não Newtonianos

Para fluidos não Newtonianos, há vários resultados para domínios limitados, e.g.

- J.L. Lions, *Quelques Méthods de Resolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars (1969), Cap. 2, Observação 5.5: $p \geq 3n/(n+2)$.
- W. Sadowski, *On the Stationary Flow of the Power Law Fluid in 2D*, J. Appl. Analysis, **8**, 2002: $1 < p < 2$.

Em domínios ilimitados, há poucos trabalhos, e.g.

- E. Marusic-Paloka, 2000: problema de Leray, $p > 2$.

Sobre as demonstrações: solução de Amick

<u>Solução de Amick do problema de Leray</u> (para fluidos Newtonianos, com fluxo pequeno):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{u}|\partial\Omega = 0, \ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{a}\Big|\partial\Omega = 0, \ \mathrm{div}\boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{a}\Big|\Omega_i = \boldsymbol{v}_P^i.$$

O sistema de Navier-Stokes torna-se

$$-\Delta\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + l(\boldsymbol{u}) + \nabla\mathcal{P} = 0,$$

onde

$$l(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} + (\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}\,.$$

Método: método de compacidade, com aproximações de Galerkin.

Solução de Amick: continuação

Controle do termo não linear $\int ((\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$ por $\int |\nabla \boldsymbol{u}|^2$ (estimativa a priori):

$$\int |((\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}| \leq \left(\int |\nabla \boldsymbol{u}|^2\right)^{1/2} \left(\int |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{u}|^2\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{u}|^2 &= \int_{\Omega_i} |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}^i_P|^2 \\
&= \left| \int_0^{\pm\infty} \int_\Sigma |\boldsymbol{v}^i_P|^2 |\boldsymbol{u}|^2 \right| \\
&\leq \left| \int_0^{\pm\infty} \left(\int_\Sigma |\boldsymbol{v}^i_P|^4\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\boldsymbol{u}|^4\right)^{1/2} \right| \\
&= \left| \int_0^{\pm\infty} \|\boldsymbol{v}^i_P\|^2_{L^4(\Sigma)} \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^4(\Sigma)} \right| \\
&\leq c \left| \int_0^{\pm\infty} \|\nabla \boldsymbol{v}^i_P\|^2_{L^2(\Sigma)} \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Sigma)} \right| \\
&= c \, \|\nabla \boldsymbol{v}^i_P\|^2_{L^2(\Sigma)} \left| \int_0^{\pm\infty} \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Sigma)} \right| \\
&= c \, \Phi^2 \int_{\Omega_i} |\nabla \boldsymbol{u}|^2
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos estimar $\int ((\nabla \boldsymbol{a})\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.

Os termos $\int_{\Omega_i} (-\Delta \boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$ and $\int_{\Omega_i} ((\nabla \boldsymbol{a})\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$ anulam-se, devido a $(\nabla \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = 0$, pois $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}^i_P$ em Ω_i é paralelo, e $-\Delta \boldsymbol{a} = (-\Delta \boldsymbol{v}^i_P)\mathbf{n} = c\mathbf{n}$ em Ω_i, logo

$$\int_{\Omega_i} (-\Delta \boldsymbol{a})\boldsymbol{u} = \left| c \int_0^{\pm\infty} \int_\Sigma \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{n} \right| = 0.$$

Solução de Ladyzhenskaya-Solonnikov

Solução de Ladyzhenskaya-Solonnikov, para fluidos Newtonianos fluids com fluxo arbitrário:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a};\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \ \boldsymbol{u}\Big|\partial\Omega = 0$$

e $\boldsymbol{a}$ é dado pelo seguinte lema:

Lemma ([LS], Pileckas). *Para qualquer $\delta > 0$ existe um campo vetorial $\boldsymbol{a}$ tal que*

a$_1$) $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{a}|\partial\Omega = 0$,

a$_2$) $\int_\Sigma \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{n} = 1$ *para qualquer seção transversal* Σ *de* Ω,

a$_3$) $\int_{\Omega_i^{t-1,t}} |\nabla \boldsymbol{a}|^2 \leq c$ *para* $i = 1, 2$ *e todo* $t \geq 1$, *onde*

$\Omega_i^{t-1,t} = \{(\bar{x}, x') \in \Omega_i\,;\ t-1 < |x'| < t\}$,

and

a$_4$) $\int_{\Omega^t} |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{u}|^2 \leq c\delta \int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{u}|^2$ para todo $t > 0$ e $\boldsymbol{u} \in C_c^\infty(\Omega)$,

onde, em a$_3$) e a$_4$), c is uma constante dependente apenas de Ω.

Observação: Dado qualquer $\Phi \in \mathbb{R}$, multiplicando $\boldsymbol{a}$ por Φ, obtemos um campo vetorial tendo fluxo Φ e matendo todas as propriedades acima.

$\boldsymbol{a}\Big|\Omega_i$ não é (necessariamente) o campo de Poiseuille $\boldsymbol{v}_P^i$, mas o método de compacidade ainda funciona, truncando o domínio e fazendo uma série de cálculos:

Solução de Ladyzhenskaya-Solonnikov: continuação

Seja $\boldsymbol{u}^t$ uma solução do sistema de Navier-Stokes

$$-\Delta \boldsymbol{u}^t + (\nabla \boldsymbol{u}^t)\boldsymbol{u}^t + l(\boldsymbol{u}^t) + \nabla \mathcal{P}^t = 0$$

em Ω^t (junto com função de pressão).

Seja $t' > t$. Multiplicando a equação $-\Delta \boldsymbol{u}^{t'} + (\nabla \boldsymbol{u}^{t'})\boldsymbol{u}^{t'} + l(\boldsymbol{u}^{t'}) + \nabla \mathcal{P}^{t'} = 0$ por $\boldsymbol{u}^{t'}$ and integrando por partes em Ω^t ... [LS]

$$\int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 \leq ct + \int_{\Sigma(t)} (\text{termos de fronteira}),$$

para todo $t < t'$. Integrando em t, de $\eta - 1$ a $\eta \leq t'$, temos

$$z(\eta) := \int_{\eta-1}^{\eta} \left(\int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 \right) dt \leq c\eta - \frac{1}{4} + \int_{\Omega^{\eta-1,\eta}} (\text{termos de fronteira})\,.$$

Usando a equação, é possível estimar $\int_{\Omega^{\eta-1,\eta}}(\text{termos de fronteira})$ por uma combinação linear de potências de $\int_{\Omega^{\eta-1,\eta}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2$. Mas

$$\int_{\Omega^{\eta-1,\eta}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 = z'(\eta)\,!$$

Solução de Ladyzhenskaya-Solonnikov: continuação

Assim,

$$z(\eta) := \int_{\eta-1}^{\eta} \left(\int_{\Omega^{t}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 \right) dt \leq c\eta + g(z'(\eta)), \quad \forall\, \eta \leq t',$$

para alguma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso,

$$z(t') \leq \int_{\Omega^{t'}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 \leq ct'.$$

Então, por um "*lema de Gronwall reverso*", ou seja, pelo lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov a seguir, temos

$$z(\eta) \leq c\eta,$$

o que implica em

$$\int_{\Omega^{\eta-1}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2 \leq c\eta, \quad \forall\, \eta \leq t'.$$

Então, fixando t (arbitrário), a integral $\int_{\Omega^{t}} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^2$, para $t' > t$, é limitada by $c(t+1)$.

Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov

Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov [LS]. *Seja* $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função estritamente crescente,* δ *um número no intervalo* $(0, 1)$ *e* $T > 0$*. Se* z *e* φ *são funções diferenciávies no intervalo* $[0, T]$ *satisfazeno as desigualdades*

$$\begin{cases} z(t) \leq \Psi(z'(t)) + (1-\delta)\varphi(t), \\ \varphi(t) \geq \delta^{-1}\Psi(\varphi'(t)), \end{cases}$$

para todo $t \in [0, T]$*, e* $z(T) \leq \varphi(T)$*, então*

$$z(t) \leq \varphi(t)\,, \; \forall\, t \in [0, T].$$

Construção do campo $\boldsymbol{a}$

Construção de $\boldsymbol{a}$, em Ω_i para $n = 3$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2\pi}\nabla \times (\zeta \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2\pi}\nabla\zeta \times \boldsymbol{b},$$

onde

$$\boldsymbol{b}(x) = \left(-\frac{x_2}{|\bar{x}|^2}, \frac{x_1}{|\bar{x}|^2}, 0\right), \quad \bar{x} = (x_1, x_2),$$

e ζ é a "função de truncamento" de E. Hopf:

$$\zeta(x) = \psi\left(\varepsilon \log \frac{\sigma(|\bar{x}|)}{\rho(x)}\right);$$

$\rho(x)$:	distância regularizada a $\partial\Omega$
$\sigma, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:	funções suaves não-decrescentes,

$$\sigma(s) = \begin{cases} \frac{l}{4}, & s \leq \frac{l}{4} \\ t, & s > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ 1, & s > 1 \end{cases}$$

$\varepsilon = \varepsilon(\delta)$.

Fluidos não Newtonianos, $p > 2$

- A construção de $\boldsymbol{a}$ pode ser bastante simplificada.
É suficiente que $\boldsymbol{a}$ seja um campo limitado de divergnte nulo e anulando-se em $\partial\Omega$!

- Termo não linear extra

$$|D(\boldsymbol{v})|^{p-2} D(\boldsymbol{v})$$

Monotonicidade, **método de Browder-Minty**

- Desigualdades:

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq c|x-y|^p, \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (p > 2)$$

$$\int_{\Omega^t} |\nabla \boldsymbol{u}^{t'}|^p \leq c \int |D(\boldsymbol{u}^{t'})|^p$$

desigualdade de Korn, com $\boldsymbol{u}^{t'}$ anulando-se apenas numa parte de $\partial\Omega^t$:

- Patrizio Neff, Proc. Royal Soc. Edinb. A **132** (2002).

Fluidos não Newtonianos: continuação

• Não há regularidade de solução generalizada para o sistema $(NS)_p$.
Regularidade com $|D(\boldsymbol{v})|^{p-2}D(\boldsymbol{v})$ modificado para

$$(\varepsilon + |D(\boldsymbol{v})|)^{p-2}\, D(\boldsymbol{v}), \quad \varepsilon > 0 \;:$$

- Beirão da Veiga, Kaplický and Růžička, *Boundary regularity of shear thickening flows*. J. Math. Fluid Mech., to appear; published online. Abridged version: C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2010).
- 2D: Kaplický, Málek and Stará $C^{1,\alpha}$*-solutions to a class of nonlinear fluids in two dimensions — stationary Dirichlet problem*, J. Math. Sci. (2002).

O problema aproximado em Ω^t:

$$
\begin{cases}
\operatorname{div}\{\big(\frac{1}{t} + |D(\boldsymbol{u}) + D(\boldsymbol{a})|\big)^{p-2}(D(\boldsymbol{u}) + D(\boldsymbol{a}))\} \\
= \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + l(\boldsymbol{u}) + \nabla \mathcal{P} \quad \text{in } \Omega^t \\
\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega^t \\
\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^t
\end{cases}
$$

$$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}^t$$

<u>Controle dos termos não lineares</u> – Queremos controlar estes termos por $\int |\nabla \boldsymbol{u}|^p$.

O argumento no domínio truncado Ω^t:

Tomando $x = D(\boldsymbol{v}^{t'}) = D(\boldsymbol{u}^{t'}) + D(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{v}^t = \boldsymbol{u}^t + \boldsymbol{a}$, $t' > t$, e $y = D(\boldsymbol{a})$ ($\Rightarrow$ $x - y = D(\boldsymbol{u}^{t'})$) na primeira desigualdade e usando a desigualdade de Korn, temos – escrevendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{t'}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{t'}$:

$$\int_{\Omega^t} |D(\boldsymbol{v})|^{p-2} D(\boldsymbol{v}) : D(\boldsymbol{u}) \geq c \int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p + \int_{\Omega_t} |D(\boldsymbol{a})|^{p-2} D(\boldsymbol{a}) : D(\boldsymbol{u})\,;$$

Pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_t} |D(\boldsymbol{a})|^{p-2} D(\boldsymbol{a}) : D(\boldsymbol{u}) \right| &\leq \int_{\Omega_t} |D(\boldsymbol{a})|^{p-1} |D(\boldsymbol{u})| \\ &\leq \int_{\Omega_t} (\epsilon |D(\boldsymbol{u})|^p + c_\epsilon |D(\boldsymbol{a})|^p) \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p + c_\epsilon c t\,. \end{aligned}$$

Em relação ao termo $\int (a\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, pelas desigualdades de Hölder e Young, temos

$$
\begin{aligned}
& |\int_{\Omega_t} ((\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\,| \leq \left(\int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega_t} |\boldsymbol{a}|^{p'} |\boldsymbol{u}|^{p'}\right)^{1/p'} \\
\leq & \left(\int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p\right)^{1/p} \left(c\, t^{(p-2)/(p-1)} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p\right)^{1/(p-1)}\right)^{1/p'} \\
= & \left(\int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p\right)^{2/p} c^{1/p'}\, t^{(p-2)/p} \\
\leq & \epsilon \int_{\Omega_t} |\nabla \boldsymbol{u}|^p + ct\,.
\end{aligned}
$$

<u>Observação</u>: não precisamos de "δ" pequeno!

Para passar ao limite nas soluções aproximadas, o método de compacidade não é suficiente devido ao termo não linear

$$A(u) := -\mathrm{div}\left(|D(u) + D(a)|^{p-2}(D(u) + D(a))\right) .$$

Mas a desigualdade

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\rangle \geq c|x - y|^p$$

implica que o operador A é monótono e podemos aplicar o método de Browder e Minty. Para uma introdução a este método, v. e.g.

- L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, § 9.1.

Domínios mais gerais - canais “curvos”

Trabalho em andamento.