

## 2a. Lista de Exercícios

Para os exercícios 1 a 3, sejam  $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  satisfazendo a condição de entropia  $u_i(x+z, t) - u_i(x, t) \leq C(1+1/t)z$ ,  $i = 1, 2$ , para quaisquer  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$ ,  $t > 0$ , q.t.p.,  $u_i^\varepsilon$  as suas regularizações,  $f$  uma função convexa ( $f'' \geq 0$ ) de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}$ ,  $b^\varepsilon = \int_0^1 f''(ru_1^\varepsilon + (1-r)u_2^\varepsilon)dr$ ,  $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}_+^2)$  ( $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ),  $0 < \tau < T$  tais que  $\text{spt}\psi \subset \mathbb{R} \times (\tau, T)$  e  $v^\varepsilon$  a solução do problema  $v_t^\varepsilon + b^\varepsilon v_x^\varepsilon = \psi$ ,  $\psi|_{t=T} = 0$ .

- 01.** a) A solução  $v^\varepsilon$  do problema acima é única em  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .  
b)  $v^\varepsilon(x, t) = \int_t^T \psi(x^\varepsilon(s), s)ds$ , onde  $\dot{x}^\varepsilon = b^\varepsilon(x^\varepsilon)$ ,  $x^\varepsilon(t) = x$ .  
c) Se  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  então  $v^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .
- 02.** A família  $\{v_x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  é (uniformemente, em relação a  $\varepsilon$ ) limitada em  $\mathbb{R} \times (\tau, \infty)$ .
- 03.**  $\sup_{t \in [0, \tau], \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\varepsilon(x, t)| dx < \infty$ .
- 04 a 13:** Exercícios 2 a 11 do Capítulo 2 do [Evans].
- 14.** Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com a fronteira suave. Mostre que se  $\{u\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de funções harmônicas e de classe  $C^2$  em  $\bar{\Omega}$  tais que  $\{u_k|_{\partial\Omega}\}$  converge uniformemente então  $\{u\}_k$  converge uniformemente para uma função harmônica em  $\Omega$ .
- 15.** Seja  $\Omega$  como no Exercício 14 e  $G$  a função de Green de  $\Omega$ . Mostre que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_\Omega G(x, y) dy = 0$  para todo  $x_0 \in \partial\Omega$ .
- 16.** Mostre as (três) identidades de Green (“Green’s formulas”; cf. [Evans, p. 712]).
- 17 a 20:** Exercícios 4.8, 4.9, 4.10 e 4.13 do Capítulo 4 do [Salsa].