Lista 14 - MA311CD, 2020

Séries de Fourier e equação do calor.

Ricardo Antonio Mosna, dezembro de 2020

1. Ache a série de Fourier da função $f(x) = \cos^2(x)$.

2. Ache a série de Fourier da onda triangular e da onda quadrada definidas como as extensões periódicas das funções abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

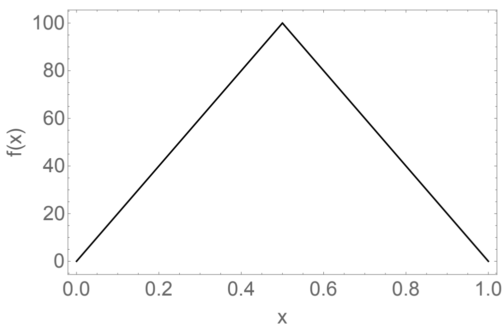
   Confirme explicitamente que a série de Fourier tende ao valor médio entre os limites pela direita e pela esquerda nos possíveis pontos de descontinuidade das funções originais. Faça um gráfico com a soma dos m primeiros termos de cada uma das séries acima, aumentando gradualmente m.

3. Considere uma barra de comprimento L e com uma distribuição inicial uniforme de temperatura $f(x) = T = \text{cte}$. Sabemos que a evolução da temperatura na barra, $u(t, x)$, segue a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   Suponha que as extremidades da barra sejam mantidas à temperatura zero. Determine $u(t, x)$. O que acontece para t suficientemente grande?

4. Considere a função $f(x)$ definida para x ente 0 e 1 pela figura abaixo.



   Determine a série de Fourier da extensão periódica ímpar de $f(x)$. Faça um gráfico de f juntamente com a soma dos m primeiros termos da série, aumentando gradualmente m.

5. Considere uma barra de comprimento 1 (em algum sistema de unidades) e com uma distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$ do exercício anterior. Sabemos que a evolução da temperatura na barra, $u(t,x)$, segue a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Suponha que as extremidades da barra sejam mantidas à temperatura zero e que $K = 1$ nas unidades escolhidas. Determine $u(t,x)$. Faça gráficos deste perfil de temperatura para vários valores de t.