Lista 13 - MA311CD, 2020

Solução de EDOs por séries II.

Ricardo Antonio Mosna, dezembro de 2020

1. Ache a solução geral das EDOs abaixo em termos de séries de potências generalizadas em torno de $x = 0$:

   (a) $y'' + \dfrac{5}{4x}y' + \dfrac{x-1}{8x^2}y = 0$;

   (b) $y'' + \dfrac{1}{2x}y' + \dfrac{1}{x}y = 0$;

   (c) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0$.

   Em cada caso, resolva as equações também pelo Mathematica e faça gráficos verificando como as somas truncadas de cada série se aproximam da respectiva solução exata ou numérica.

2. Considere a equação diferencial

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0.$$

   (a) Determine uma solução para esta EDO usando o método de Frobenius em torno de $x = 0$.

   (b) Mostre que tal solução pode ser expressa em forma fechada (pode ser útil aqui ter em mente a expressão da soma de uma série geométrica).

   (c) Use redução de ordem para obter uma segunda solução, linearmente independente à que você obteve no item anterior.

   (d) Obtenha a solução geral desta EDO.

   (e) Obtenha a solução do PVI dado por esta EDO e pelas condições iniciais $y(\frac{1}{2}) = 1$ e $y'(\frac{1}{2}) = 1$.

   (f) Faça um gráfico de tal solução. Em qual ponto (aproximadamente) tal solução atinge seu valor mínimo? Qual é esse valor mínimo (aproximadamente)?

3. Considere a equação de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0,$$

   onde λ é uma constante real.

   (a) Encontre uma solução em série de potências generalizada para tal equação.

(b) Para quais valores de λ você pode garantir que tal equação tenha uma solução polinomial?[1]

(c) Considere agora o caso em que $\lambda = 0$: $xy'' + (1-x)y' = 0$. Exiba duas soluções linearmente independentes em termos de séries de potências (generalizadas) para esse caso. Esse item é mais difícil; uma dica é usar redução de ordem e calcular a integral resultante só depois de expandir o integrando em série.

4. Considere a equação de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

(a) Ache duas soluções independentes na forma de uma série de potências em torno de $x = 0$.

(b) Determine o raio de convergência destas séries. Você poderia ter previsto tais valores mesmo antes de calcular explicitamente as séries?

(c) Mostre que se $\alpha = 2k$, com $k \geq 0$ inteiro, então uma das séries se reduz a um polinômio de ordem $2n$.

(d) Mostre que se $\alpha = 2k+1$, com $k \geq 0$ inteiro, então a outra série se reduz a um polinômio de ordem $2k+1$.

(e) Denotemos as soluções polinomiais dos dois itens anteriores por $P_n(x)$, onde n é o grau do polinômio correspondente. Normalize tais polinômios de maneira que $P_n(1) = 1$. Tais $P_n(x)$ são chamados de polinômios de Legendre. Mostre que os quatro primeiros polinômios de Legendre são dados por

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

[1] Tais soluções têm papel importante no problema do átomo de hidrogênio em mecânica quântica. Os polinômios de Laguerre aparecem ainda como funções-base no método de integração numérica de Gauss-Laguerre.