Lista 11 - MA311CD, 2020

Sequências e séries II.

Ricardo Antonio Mosna, dezembro de 2020

1. Investigue se as séries abaixo são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$;

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$;

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\mathrm{e}^{-n}$;

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\mathrm{e}^{-n}$;

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$;

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(n)}{n^2}$.

2. Escreva o número $0,99999\ldots$ como uma série. Calcule a soma desta série.

3. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

4. Determine o raio de convergência das séries de potência abaixo.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n$.

5. Calcule a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ em $x = 0$. Em seguida, calcule o raio de convergência da série de potências resultante. Conclua que uma função pode estar perfeitamente bem definida para além do raio de convergência de sua série de Taylor. Finalmente, faça um gráfico de $f(x)$ e de suas aproximações por séries de potências (no Mathematica), com potências cada vez mais altas e compare.

6. (Opcional) Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Esboce o gráfico de $f(x)$. Essa função é claramente infinitamente diferenciável em todos os pontos da reta, com a possível exceção de $x = 0$. Mostre que esse ponto não é de fato uma exceção, calculando explicitamente todas as derivadas $f^{(n)}(0)$ de f. Em seguida calcule a série de Taylor de f em torno de $x = 0$. Discuta.