Lista 5 - MA311CD, 2020

Redução de ordem, equação de Euler-Cauchy de ordem 2, variação de parâmetos para EDOs não homogêneas.

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2020

1. Considere a EDO
$$xy'' + (2x^2 - 1)y' - 8x^3y = x^3 \tag{1}$$
   (a) Encontre a solução geral da equação homogênea associada (dica: note que $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ é uma solução).
   (b) Determine a solução geral de (1).
   (c) Determine a solução do PVI dado por (1), $y(1) = 1$ e $y'(1) = -9/2$.
   (d) Faça o gráfico desta solução no Mathematica. Para quais valores de x (exatos ou aproximados) temos $y(x)$ positivo?

2. Considere a EDO
$$x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x), \quad x > 0. \tag{2}$$
   (a) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
   (b) Determine a solução geral de (2).
   (c) Determine a solução do PVI dado por (2), $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$.
   (d) Faça o gráfico desta solução no Mathematica. Para quais valores de x (exatos ou aproximados) temos $y(x)$ negativo?

3. Considere a EDO
$$x^2y'' - xy' + 2y = x, \quad x > 0. \tag{3}$$
   (a) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
   (b) Determine a solução geral de (3).
   (c) Determine a solução do PVI dado por (2), $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$.
   (d) Faça o gráfico desta solução no Mathematica. Para quais valores de x (exatos ou aproximados) temos $y(x) > 1$?

4. **Ressonância 1:** Considere a EDO do oscilador harmônico sem amortecimento sujeito a uma força periódica $f(t) = \cos(\omega_1 t)$:
$$x''(t) + \omega_0^2\, x(t) = \cos(\omega_1 t). \tag{4}$$

Suponha que $\omega_1 \neq \omega_0$ (isto é, que a frequência natural do oscilador, ω_0, não é a mesma que a frequência da força externa, ω_1).

(a) Determine a solução geral de (4).

(b) Determine a solução do PVI dado por (4), $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (isto é, oscilador inicialmente em repouso e em seu estado relaxado).

(c) Analise detalhadamente o movimento resultante. O que acontece quando $\omega_1 \to \omega_0$? Esse é o chamado fenômeno de ressonância.[1]

5. **Ressonância 2:** Considere a EDO do oscilador harmônico sem amortecimento sujeito a uma força periódica $f(t) = \cos(\omega_0 t)$:

$$x''(t) + \omega_0^2\, x(t) = \cos(\omega_0 t). \tag{5}$$

Note que agora a frequência da força externa é exatamente igual à frequência natural do oscilador.

(a) Determine a solução geral de (5).

(b) Determine a solução do PVI dado por (5), $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (isto é, oscilador inicialmente em repouso e em seu estado relaxado).

(c) Mostre que tomando, no exercício anterior, $\omega_1 \to \omega_0$ o resultado do item (b) é recuperado.

[1] Este vídeo ilustra esse fenômeno: `https://www.youtube.com/watch?v=fr3gWpxuJxE`.