Lista 3 - MA311CD, 2020

EDOs lineares de ordem superior, Wronskiano, EDOs homogêneas de coeficientes constantes.

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2020

1. Resolva as seguintes equações diferenciais e, se for o caso, o problema de valor inicial correspondente.

   (a) $2y'' + y' - y = 0$.

   (b) $y'' + 4y = 0$.

   (c) $x'' + 2x' + 5x = 0$;

   (d) $4y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 1$;

   (e) $x'' - 2x' + x = 0$;

   (f) $x'' - 2x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

   (g) $y''' - 3y'' + 4y = 0$;

   (h) $y''' - 3y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

2. Resolva o exercício acima agora utilizando o Mathematica.

3. Como você sabe, o Wronskiano tem algo (ou muito?) a dizer sobre a independência linear de funções. Discuta isso no contexo dos seguintes conjuntos de funções:

   (a) $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}\}$;

   (b) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, $n > 1$.

4. (Opcional) Mostre que duas funções são linearmente dependentes entre si se, e somente se, podemos escrever uma delas como uma constante vezes a outra. Agora considere $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x|x|$. Desenhe os gráficos de y_1 e y_2 e convença-se de que tais funções e suas derivadas são contínuas. Tais funções são linearmente dependentes ou independentes? Calcule o Wronskiano correspondente a y_1 e y_2. Discuta.

5. (Opcional) A expressão $\mathcal{E}(\theta) := \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ merece ser chamada de exponencial de $i\theta$ por pelo menos três motivos, elaborados a seguir:

   (a) Mostre (usando apenas a álgebra dos números complexos e identidades trigonométricas) que $\mathcal{E}(\theta_1)\mathcal{E}(\theta_2) = \mathcal{E}(\theta_1 + \theta_2)$.

(b) Usando apenas propriedades de funções trigonométricas (sem usar exponenciais), mostre que $\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\theta} = i\,\mathcal{E}(\theta)$, com $\mathcal{E}(0) = 1$. (Pense na derivada da função real com valores complexos $\mathcal{E}(\theta)$ da maneira óbvia).

(c) Mostre que a expansão de Taylor de $\mathcal{E}(\theta)$ é exatamente o que se espera da expansão de Taylor da exponencial de um número complexo.

E então? A relação de Euler,

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta),$$

é algo inventado ou descoberto?