MI416 - Introdução a Modelos Lineares
Prova #1

Profa. Mariana Rodrigues Motta

30/09/2009

Leia a prova com bastante atenção!!! A solução de toda a prova é de caráter individual. Estão, portanto, descartados todos os intercâmbios de idéias, papéis, calculadoras e quaisquer outros materiais e informações. Quaisquer dúvidas devem ser dirigidas diretamente ao professor. Não se esqueçam de que a interpretação da questão faz parte da avaliação. COLOCAR NOME E RA. Boa sorte!!

1. Quatro observações de uma variável aleatória Y são tomadas para cada valor de $X = -1, 0, 1$, com a intenção de se ajustar um modelo cúbico da forma
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \varepsilon \tag{1}$$
pelo método de Mínimos Quadrados. Aqui, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e β_3 são parâmetros fixos e desconhecidos, ε é um erro aleatório com média 0 e variância constante σ^2, e erros de observações diferentes são considerados independentes.

   (a) Escreva a matriz de desenho $\mathbf{X}$.

   (b) Escreva a matriz de projeção $\mathbf{P}$ do espaço de estimação, tal que $\mathbf{PY}$ pertença a este espaço. A matriz $\mathbf{P}$ é única? Justifique sua resposta.

   (c) Encontre a soma dos quadrados dos resíduos (SQ_e) e a soma dos quadrados da regressão (SQ_r).

   (d) Encontre $\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta})$ e $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta})$.

2. Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.'s independentes e $X_i \sim Normal(0, \sigma_i^2), i = 1, ..., n$. Seja $\tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} X_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}}$ e $\tilde{S}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}(X_i - \tilde{X})^2$. Aplique o Teorema de Cochran para mostrar que $\tilde{X}^2$ e $\tilde{S}^2$ são independentes e que $\tilde{S}^2$ tem distribuição Qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

3. Para um experimento de blocos completamente aleatorizado escrevemos o modelo na forma

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

onde $i = 1, ..., k$ indexa tratamento, $j = 1, ..., b$ indexa bloco e $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ corresponde ao erro. Além disso, seja $\alpha_i = \mu_i - \mu$ o efeito do tratamento i tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$, μ é a média geral e μ_i é a média do $i-$ésimo tratamento. Adicionalmente, $\beta_j = \mu_{b,j} - \mu$ é o efeito do $j-$ésimo bloco e $\mu_{b,j}$ é a média no bloco j. Assuma que $\sum_{i=1}^{b} \beta_j = 0$.Usando o conceito de regressão, a soma dos quadrados da regressão poderia ser "quebrada" devido às seguintes fontes de variabilidade: média, tratamento e bloco. No entanto, o interesse recai sobre variabilidade devido aos tratamentos e devido aos blocos. Uma análise preliminar do experimento de blocos completamente aleatorizado é dada na tabela a seguir.

Fonte de Variabilidade	gl	SQ
regressão	p	SQ_r
resíduo	ab-p	SQ_e
total	ab	SQ_t

(a) Qual o valor de p na tabela acima? Justifique sua resposta.

(b) Reescreva a tabela acima quebrando SQ_r na soma de quadrados da média, do tratamento e dos blocos. Além disso determine seus respectivos graus de liberdade.

(c) Usando o conceito de eliminação da média, escreva um algoritmo para obtermos as apropriadas somas dos quadrados dos tratamentos (SQ_{trt}) e dos blocos (SQ_b) para um experimento de blocos completamente aleatorizado. Escreva uma nova tabela ANOVA, fazendo a correta "quebra" das fontes de variabilidade e escreva seus respectivos graus de liberdade.

(d) Considerando a tabela dada, encontre a soma dos quadrados da média (SQ_{me}) depois de aplicado o processo de eliminação da média descrito em (b), onde agora a soma dos quadrados totais é denotada por SQ_{te}.