Resultados Teóricos - Soma de Subespaços

Proposição: Considerando os subespaços $U = [S_1]$ e $W = [S_2]$, ou seja, U é gerado pelos elementos do conjunto S_1 e W é gerado pelos elementos do conjunto S_2, temos que $U+W = [S_1 \cup S_2]$, ou seja, a Soma dos subespaços U e W é gerada pela união dos conjuntos S_1 e S_2.

Demonstração: Vamos mostrar que $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$ demonstrando que um subespaço está contido em outro e vice-versa, o que equivale a demonstrar que qualquer elemento de um subespaço pertence ao outro e vice-versa.

Sejam $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $S_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ conjuntos finitos de um espaço vetorial V.

Temos $S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_m\}$. Se $w \in [S_1 \cup S_2]$, então: $w = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + (\beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m)$. Mas $[S_1]$ e $[S_2]$ são subespaços vetoriais, então $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in [S_1]$ e $u = \beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m \in [S_2]$ e portanto, $w = v + u$ pertence a $[S_1] + [S_2]$;

Agora, se $w \in [S_1] + [S_2]$, então, $w = v + u$ com $v \in [S_1]$ e $u \in [S_2]$. Se $v \in [S_1]$ então v é combinação linear dos elementos de S_1, ou seja, $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. E, se $u \in [S_2]$ então u é combinação linear dos elementos de S_2, ou seja, $u = \beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m$.

Temos então que $w = v + u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m$, ou seja, w é combinação linear dos elementos de $S_1 \cup S_2$, assim $w \in S_1 \cup S_2$.

Assim, demonstramos que $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Proposição: *Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada elemento $v \in V$ pode ser escrito de forma única pela combinação $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Considerando que $V = U \oplus W$ já temos a existência da decomposição, basta mostrar a unicidade. Supondo que $v = u + w = u_1 + w_1$ com $u, u_1 \in U$ e $w, w_1 \in W$. Assim, temos: $u - u_1 = w - w_1$. Como $u - u_1 \in U$ e $w - w_1 = u - u_1 \in W$, temos:

$$w - w_1 \in U \cap W = \{e\}$$

pois $U \oplus W$ é soma direta. Logo, $w - w_1 = e \Rightarrow w = w_1$. De modo análogo, temos que $u - u_1 = e \Rightarrow u = u_1$, o que mostra a unicidade da decomposição.

($\Leftarrow$) Tomando por hipótese a unicidade da decomposição $v = u + w \in V$, com $u \in U$ e $w \in W$, vamos mostrar que $V = U \oplus W$. Supondo $v \in U \cap W$, somando e subtraindo v em $u + w$ temos que:

$$u + w = (u + v) + (w - v)$$

Mas, pela unicidade da decomposição temos: $u = u + v$ e $w = w - v$. Logo, $v = e$, com e o elemento neutro de V. Assim, $U \cap W = \{e\}$. Portanto, mostramos que $V = U \oplus W$.