Exemplos - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 1: *Considere a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $T(x,y,z) = x+y-z$. *Vamos determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de* T.

Um elemento (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo de T se $T(x,y,z) = x+y-z = 0 \Rightarrow x = -y+z$. Assim um elemento do núcleo de T é da forma: $(x,y,z) = (-y+z,y,z) = y(-1,1,0)+z(1,0,1)$. Assim, $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ é um conjunto de geradores para o núcleo de T. Escalonando, podemos constatar que este conjunto é L.I. e assim, é uma base para $\mathcal{N}(T)$, logo, $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$.

Vamos achar um conjunto de geradores para a imagem de T. A transformação T pode ser escrita da forma:

$$T(x,y,z) = x+y-z = 1(x+y-z)$$

Assim, $\{1\}$ é um conjunto de geradores para a imagem e por ser L.I., é uma base para $Im(T)$, assim, $dim(Im(T)) = 1$.

Observe que $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$ e $dim(Im(T)) = 1$, logo $dim(\mathcal{N}(T))+dim(Im(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, como era de se esperar, pelo teorema do núcleo e da imagem.

Exemplo 2: *Determinar uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *cuja imagem é gerada por* $(2,1,1)$ *e* $(1,-1,2)$.

Como os elementos $(2,1,1)$ e $(1,-1,2)$ são L.I. em $\mathbb{R}^3$, temos que eles formam uma base para a imagem de T, logo, $dim(Im(T)) = 2$. Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem, sabemos que $dim(\mathcal{N}(T)) = 1$.

Desta forma, escolhemos uma base para $\mathbb{R}^3$, por exemplo, a base canônica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e podemos definir, **por exemplo**, a transformação linear T da seguinte forma:

$$T(1,0,0) = (0,0,0), \qquad T(0,1,0) = (2,1,1), \qquad T(0,0,1) = (1,-1,2)$$

Desta forma, a imagem será gerada pelo conjunto dado e o núcleo terá dimensão 1. Assim, teremos:

$$T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(0,0,0) + y(2,1,1) + z(1,-1,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = (2y+z, y-z, y+2z)$$

Observe que a resposta não é única e depende da escolha da base para $\mathbb{R}^3$ e também de quais elementos da base serão levados nos geradores da imagem.

Exemplo 3: *Determinar uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que:*

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$$

Um elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo de T se $x+y+z = 0 \Rightarrow x = -y-z$. Logo, um elemento do núcleo é da forma:

$$(x,y,z) = (-y-z,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

Assim, $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é um conjunto de geradores para o núcleo de T, e como é L.I., é uma base para $\mathcal{N}(T)$, portanto, $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, sabemos

então que $dim(Im(T)) = 1$. Basta, portanto, completarmos a base $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ do núcleo e obter uma base para $\mathbb{R}^3$.
Podemos escolher, por exemplo, o elemento $(1,0,0)$ e assim, o conjunto $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,0,0)\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

Agora, basta tomarmos a imagem dos geradores de núcleo como sendo o elemento neutro do espaço de chegada, que no caso é $\mathbb{R}^3$ e $T(1,0,0)$ linearmente independente, ou seja, nesse caso, qualquer elemento do $\mathbb{R}^3$ que não seja o elemento neutro. Dessa forma, podemos definir, por exemplo, a transformação linear T da seguinte forma:

$$T(-1,1,0) = (0,0,0), \qquad T(-1,0,1) = (0,0,0), \qquad T(1,0,0) = (1,0,0)$$

Vamos obter as coordenadas de um elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ com relação a base $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,0,0)\}$:

$$(x,y,z) = \alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1)+\alpha_3(1,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = z \\ \alpha_3 = x + y + z \end{cases}$$

Temos, portanto, $(x,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) + (x+y+z)(1,0,0)$. Logo,

$$T(x,y,z) = T(y(-1,1,0) + z(-1,0,1) + (x+y+z)(1,0,0)) =$$

$$= yT(-1,1,0) + zT(-1,0,1) + (x+y+z)T(1,0,0) = (x+y+z)(1,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$

Assim, temos explicitamente a transformação T. Note que a resposta não é única e depende da escolha para completar a base do espaço de saída e da escolha dos elementos linearmente independentes que serão imagens dos elementos desta base.

Exemplo 4: *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear não-nula. Se $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$, determine as possíveis dimensões de V.*

Sabemos que T é não-nula e que sua imagem está contida no $\mathbb{R}^3$, logo a dimensão da imagem de T só pode ser $1, 2$ ou 3.
Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que:

$$dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$$

Logo, como $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$ as possíveis dimensões de V serão: $3, 4$ ou 5.

Exemplo 5: *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tem dimensão 1.*

Pelo teorema do núcleo e da imagem, como $dim(\mathcal{N}(T)) = 1$ e $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, temos que ter $dim(Im(T)) = 2$.
Escolhemos uma base qualquer para $\mathbb{R}^3$, por exemplo, $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e assim, definimos por exemplo, $T(1,0,0) = (0,0,0)$, dessa forma o núcleo terá dimensão 1 como desejado, e escolhemos $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$ linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, podemos definir a transformação T da forma:

$$T(1,0,0) = (0,0,0), \qquad T(0,1,0) = (1,1,0), \qquad T(0,0,1) = (0,0,1)$$

Desta forma, teremos:

$$T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(0,0,0) + y(1,1,0) + z(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = (y,y,z)$$

Note que a solução não é única e depende da escolha da base para o $\mathbb{R}^3$ e da escolha das imagens dos elementos desta base pela transformação.

Exemplo 6: *Considere a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y) = (2x, x+y)$. *A transformação* T *é bijetora.*

Vamos verificar se T é injetora. Para isto, basta sabermos o núcleo de T. Um elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está no núcleo se:

$$T(x,y) = (2x, x+y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, temos: $\mathcal{N}(T) = \{(0,0)\}$ e portanto, T é injetora.

Vamos verificar se T é sobrejetora. Como $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ e $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pelo teorema do núcleo e da imagem sabemos que $dim(Im(T)) = 2$, e como $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^2)$ temos que T é sobrejetora.
Como T é injetora e sobrejetora, temos que T é bijetora.

Exemplo 7: *Determinar uma transformação linear* $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *que satisfaça simultaneamente as condições:*

(a) O elemento $p(x) = 1 + x$ *pertence ao núcleo de* T*;*
(b) O elemento $q(x) = x$ *não pertence ao núcleo de* T*;*
(c) $Im(T) = [(1,1,1)]$.

Sabemos que $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$ e como pela condição (c) temos que ter $Im(T) = [(1,1,1)]$, podemos verificar que $\{(1,1,1)\}$ é uma base para $Im(T)$, logo, $dim(Im(T)) = 1$ e pelo teorema do núcleo e da imagem temos que ter $dim(\mathcal{N}(T)) = 2$.

Como $q(x) = x$ não pertence ao núcleo, podemos escolher $T(q(x)) = (1,1,1)$, desta forma, já satisfazemos a condição de que $(1,1,1)$ gera a imagem de T e que $q(x)$ não está no núcleo. Para satisfazer a condição (a) de que $p(x) = 1 + x$ está no núcleo, basta tomarmos $T(p(x)) = (0,0,0)$.

Agora, temos que escolher mais um elemento para gerar o núcleo. Mas, para isso, devemos completar uma base para o $P_2(\mathbb{R})$ que contenha os elementos x e $1 + x$. Podemos tomar, por exemplo, $B = \left\{x, 1+x, x^2\right\}$ como base. Dessa forma, basta definirmos $T(x^2) = (0,0,0)$, desta maneira satisfazemos todas as condições e as dimensões do núcleo e da imagem.

Um elemento do $P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base B da forma: $a + bx + cx^2 = (b-a)x + a(1+x) + cx^2$, assim, temos:

$$T(a + bx + cx^2) = (b-a)T(x) + aT(1+x) + cT(x^2) = (b-a)(1,1,1) + a(0,0,0) + c(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(a + bx + cx^2) = (b-a, b-a, b-a)$$

Observe, novamente, que a solução não é única e depende da escolha da base para $P_2(\mathbb{R})$ e das imagens dos elementos da base pela transformação linear T.