Exemplos - Polinômio Característico

Exemplo 1: Considere a seguinte matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 4 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 2 + (1-\lambda) - 8(3-\lambda) =$$

$$= -3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 + 2 + 1 - \lambda - 24 + 8\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 21$$

que é um polinômio de grau 3.

Exemplo 2: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Os autovalores de uma matriz são as raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ \text{ ou } \ \lambda = -1$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz A. Para $\lambda_1 = 2$ os autovetores associados são as soluções X, não nulas, para:

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

O que implica em $x_1 = x_2$. Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são da forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$ os autovetores associados são as soluções X, não nulas, tais que:

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = -x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases}$$

O que implica em $x_2 = -\frac{x_1}{2}$. Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são da forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{x_1}{2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, y)$. Considerando $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de B, temos:

$$T(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

Assim, $(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa o operador T com relação a base B. O polinômio característico de T é o polinômio característico de $(T)_B$ dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Os autovalores de T são os λ que são raízes do polinômio característico, ou seja:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Portanto, $\lambda = 1$ é o autovalor de T. Para encontrar os autovetores associados, devemos encontrar soluções $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, não nulas, para:

$$T(x, y) = 1(x, y) \Leftrightarrow (x + y, y) = (x, y) \Leftrightarrow x + y = x \Leftrightarrow y = 0$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = (x, 0) = x(1, 0)$.

Exemplo 4: Considere o operador linear T sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 3y + z, 4z)$$

Considerando $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de B, temos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$
$$T(0, 1, 0) = (2, 3, 0) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$
$$T(0, 0, 1) = (-1, 1, 4) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$$

Logo, a matriz que representa T com relação a base B é $(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de T é o polinômio característico de $(T)_B$, dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$$

Os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, ou seja,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 4$$

Portanto, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 4$ são os autovalores de T.
Para $\lambda_1 = 1$, os autovetores associados são tais que:

$$T(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow (x + 2y - z, 3y + z, 4z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z = x \\ 3y + z = y \\ 4z = z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$.
Para $\lambda_2 = 3$, os autovetores associados são tais que:

$$T(x, y, z) = 3(x, y, z) \Leftrightarrow (x+2y-z, 3y+z, 4z) = (3x, 3y, 3z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z = 3x \\ 3y + z = 3y \\ 4z = 3z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$ são da forma $v_2 = (x, x, 0) = x(1, 1, 0)$. Para $\lambda_3 = 4$, os autovetores associados são tais que:

$$T(x,y,z) = 4(x,y,z) \Leftrightarrow (x+2y-z, 3y+z, 4z) = (4x, 4y, 4z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z = 4x \\ 3y+z = 4y \\ 4z = 4z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3x = y \\ y = z \end{array} \right.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_3 = 4$ são da forma $v_3 = (x, 3x, 3x) = x(1, 3, 3)$.

Exemplo 5: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x, -z, y)$. A matriz $(T)_B$ que representa T com relação a base canônica B do $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Calculando as raízes do polinômio característico, obtemos:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2+1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Se considerarmos o operador linear T sobre o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$, temos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$ são autovalores de T. Mas, como estamos considerando o operador linear T sobre o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, temos que $\lambda_1 = 1$ é o único autovalor de T. Nesse caso, os autovetores associados são tais que:

$$T(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow (x,-z,y) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -z = y \\ y = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $v = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$.

Exemplo 6: Considere T um operador linear sobre $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em ralação a base canônica B do $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

Calculando as raízes do polinômio característico de T, obtemos:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -1$$

Portanto, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = -1$ são os autovalores do operador linear T.