Exemplos - Núcleo e Imagem

Exemplo 1: *Considere a transformação linear:*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = 3x + 2y \end{array}$$

Vamos determinar o núcleo da transformação linear T.

Um elemento de $\mathbb{R}^2$ está no núcleo se a transformação T o transforma no elemento neutro de $\mathbb{R}$, ou seja:

$$T(x,y) = 3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$$

Assim, a reta $y = -\frac{3}{2}x$, subespaço vetorial, de $\mathbb{R}^2$, é o núcleo da transformação linear T.

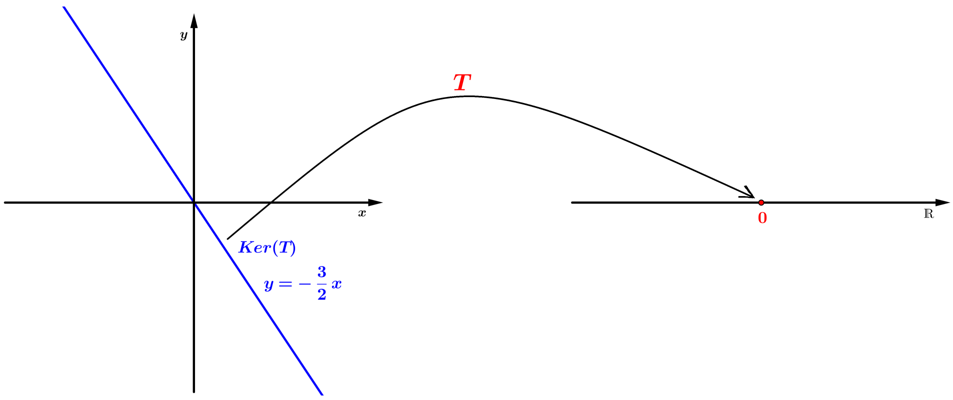

Figura 1: A reta $y = -\frac{3}{2}x$ é o núcleo da transformação linear T.

Exemplo 2: *Considere a transformação linear:*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x - y - z, 2z - x) \end{array}$$

Vamos determinar a imagem da transformação linear T.

Todo elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^2$ pertence a imagem de T se for da forma:

$$(x - y - z, 2z - x) = x(1,-1) + y(-1,0) + z(-1,2)$$

Logo, temos que $Im(T) = [(1,-1),(-1,0),(-1,2)]$. Escalonando esses geradores da imagem, como linhas de uma matriz, para obtermos uma base, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E, portanto, $\{(1,-1),(0,-1)\}$ é uma base para $Im(T)$ e $dim(Im(T)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Como $Im(T)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$ e tem a mesma dimensão que $\mathbb{R}^2$, concluímos que $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3: *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:*

$$T(1,1) = (3,2,1), \qquad T(0,-2) = (0,1,0)$$

Vamos determinar o núcleo e a imagem de T.

Primeiro, determinamos explicitamente a transformação T. Podemos verificar que $\{(1,1),(0,-2)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$. Todo elemento do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito de modo único como:

$$(x,y) = x(1,1) + \left(\frac{-y+x}{2}\right)(0,-2)$$

Assim, temos:

$$T(x,y) = T\left(x(1,1) + \left(\frac{-y+x}{2}\right)(0,-2)\right) = xT(1,1) + \left(\frac{-y+x}{2}\right)T(0,-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y) = x(3,2,1) + \left(\frac{-y+x}{2}\right)(0,1,0) \Rightarrow T(x,y) = \left(3x, \frac{-y+5x}{2}, x\right)$$

Agora, um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo de T se ele é transformado no elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ pela transformação T, ou seja:

$$T(x,y) = \left(3x, \frac{-y+5x}{2}, x\right) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x = 0 \\ \frac{-y+5x}{2} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Logo, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0)\}$.

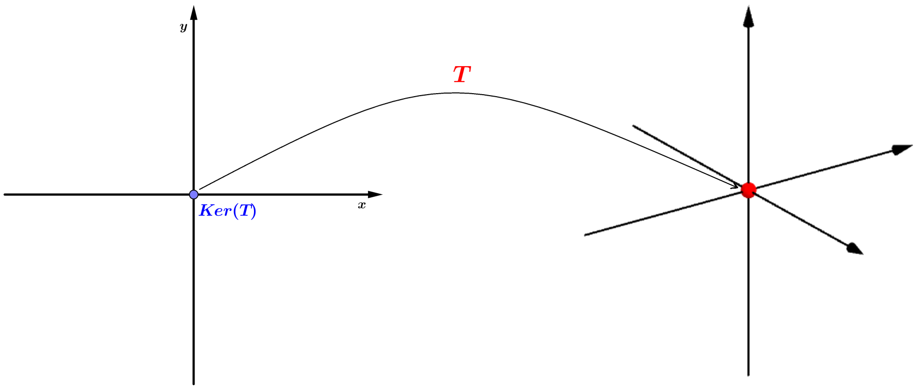

Figura 2: A origem $(0,0)$ é o núcleo da transformação linear T.

Vamos determinar o conjunto imagem de T. Um elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^3$ pertencerá a imagem de T se for da forma:

$$\left(3x, \frac{-y+5x}{2}, x\right) = x\left(3, \frac{5}{2}, 1\right) + y\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Assim, $Im(T) = \left[\left(3, \frac{5}{2}, 1\right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)\right]$. Podemos ver facilmente que esse conjunto de geradores é L.I. e portanto, $\left\{\left(3, \frac{5}{2}, 1\right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$ é uma base para $Im(T)$.

Exemplo 4: *Considere a transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y) \end{array}$$

Vamos determinar o núcleo e a imagem desta transformação linear.

No núcleo da transformação estão todos os elementos do $\mathbb{R}^3$ que são transformados no elemento neutro do $\mathbb{R}^4$ pela transformação T, ou seja:

$$T(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ -y=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-z=0 \\ x+z=0 \\ 2x+z=0 \\ y=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right.$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,0)\}$.

Um elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^4$ pertence a imagem de T se for da forma:

$$(x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y) = x(1,1,2,0) + y(-1,1,-1,-1) + z(-1,1,1,0)$$

Assim, $Im(T) = [(1,1,2,0),(-1,1,-1,-1),(-1,1,1,0)]$. Escalonando esses geradores para obtermos uma base para a imagem, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\{(1,1,2,0),(0,2,1,-1),(0,0,2,1)\}$ é uma base para $Im(T)$.