Exemplos - Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 1: *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, definida por* $F(x, y, z) = (x + y, 2z)$*. Determine a matriz da transformação linear* F*, isto é,* $(F)_{B,C}$ *com* B *e* C *as bases canônicas de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente.*

Escrevendo as imagens dos elementos da base canônica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$, pela transformação F, como combinações lineares dos elementos da base $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned}
&F(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)\\
&F(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)\\
&F(0, 0, 1) = (0, 2) = 0(1, 0) + 2(0, 1)
\end{aligned}$$

Assim, pela definição da matriz de uma transformação linear, obtemos:

$$(F)_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, definida por* $F(x, y, z) = (x + y, 2z)$*. Determine* $(F)_{B,C}$ *com* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ *base de* $\mathbb{R}^3$ *e* $C = \{(1, 0), (1, 1)\}$ *base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação linear F, como combinações lineares dos elementos da base C, temos:

$$F(1, 1, 0) = (2, 0) = \alpha_{11}(1, 0) + \alpha_{21}(1, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 2 \\ \alpha_{21} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = 2 \\ \alpha_{21} = 0 \end{array} \right.$$

$$F(1, 0, 1) = (1, 2) = \alpha_{12}(1, 0) + \alpha_{22}(1, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{12} + \alpha_{22} = 1 \\ \alpha_{22} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{22} = 2 \end{array} \right.$$

$$F(0, 0, -1) = (0, -2) = \alpha_{13}(1, 0) + \alpha_{23}(1, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{23} = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{13} = 2 \\ \alpha_{23} = -2 \end{array} \right.$$

Assim, obtemos:

$$(F)_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: *Determinar o operador linear* F *do* $\mathbb{R}^2$ *cuja matriz em relação a base* $B = \{(1, 2), (0, 5)\}$ *é:*

$$(F)_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pela definição da matriz de uma transformação linear, sabemos que:

$$F(1, 2) = 3(1, 2) + 2(0, 5) = (3, 16)$$

e

$$F(0, 5) = 1(1, 2) - 1(0, 5) = (1, -3)$$

Considere um elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevendo esse elemento como combinação linear da base B, temos:

$$(x, y) = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(0, 5) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = \frac{y-2x}{5} \end{array} \right.$$

Desse modo, temos que:

$$F(x,y) = F\left(x(1,2) + \frac{y-2x}{5}(0,5)\right) = xF(1,2) + \frac{y-2x}{5}F(0,5) =$$

$$= x(3,16) + \frac{y-2x}{5}(1,-3) = \left(3x + \frac{y-2x}{5}, 16x - 3\left(\frac{y-2x}{5}\right)\right) = \left(\frac{13x+y}{5}, \frac{86x-3y}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{5}(13x+y, 86x-3y)$$

Exemplo 4: *Seja $F : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ uma transformação linear, dada por: $F(p(x)) = (x+1)p(x)$, $\forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine a matriz de F com relação as bases $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.*

Vamos escrever as imagens dos elementos da base B, pela transformação linear F, como combinações lineares dos elementos da base C:

$F(1) = (x+1)1 = (x+1) = 1 + 1x + 0x^2 + 0x^3$
$F(x-1) = (x+1)(x-1) = (x^2-1) = -1 + 0x + 1x^2 + 0x^3$
$F((x-1)^2) = F(x^2-2x+1) = (x+1)(x^2-2x+1) = (x^3-x^2-x+1) = 1-1x-1x^2+1x^3$

Assim, obtemos:

$$(F)_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: *Considere o operador linear $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, definido por:*

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$$

Considerando $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ com a base canônica B, determine a matriz da transformação F com relação a base B.

Vamos escrever as imagens dos elementos da base B, pela transformação linear F, como combinações lineares dos elementos de B, isto é:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, pela definição da matriz de uma transformação linear, obtemos:

$$(F)_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6: *Considere os operadores lineares do* $\mathbb{R}^2$*:* $F(x,y) = (x+2y, y)$ *e* $G(x,y) = (-x,-y)$*. Determinar as matrizes dos operadores lineares:* $F+G$*,* $2F$*,* $F \circ G$ *e* F^2*, com relação a base canônica* B *do* $\mathbb{R}^2$*.*

Vamos determinar as matrizes das transformações F e G. Escrevendo as imagens, pela transformação F, dos elementos da base canônica B do $\mathbb{R}^2$, como combinação linear dos elementos de B, temos:

$$F(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1);$$

$$F(0,1) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

Assim, obtemos: $(F)_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Agora, escrevendo as imagens, pela transformação G, dos elementos da base B, como combinação linear dos elementos de B, temos:

$$G(1,0) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1);$$

$$G(0,1) = (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1)$$

Assim, obtemos: $(G)_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Desse modo, como todas as aplicações: $F+G, 2F, F \circ G$ e F^2 estão bem definidas, temos que:

- $(F+G)_B = (F)_B + (G)_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $(2F)_B = 2(F)_B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- $(F \circ G)_B = (F)_B(G)_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- $(F^2)_B = (F \circ F)_B = (F)_B(F)_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 7: *Considere o operador linear* F *sobre* $\mathbb{R}^3$*, definido por:* $F(x,y,z) = (x-y, 2y, y+z)$*. Determine o isomorfismo inverso* F^{-1}*, utilizando a matriz da transformação* F*,* $(F)_B$*, com* B *a base canônica do* $\mathbb{R}^3$*.*

Sabemos que $(F)_B^{-1} = (F^{-1})_B$. Assim, vamos determinar a matriz da transformação linear F. Temos que:

$$F(1,0,0) = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$F(0,1,0) = (-1,2,1) = -1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$F(0,0,1) = (0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Dessa forma, obtemos: $(F)_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, calculando a inversa, temos:

$$(F^1)_B = (F)_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, sabemos como o isomorfismo inverso F^{-1} age nos elementos da base B. Temos:

$$F^{-1}(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) = (1,0,0);$$

$$F^{-1}(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) - \frac{1}{2}(0,0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$F^{-1}(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) = (0,0,1)$$

Portanto, considerando um elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que:

$$F^{-1}(x,y,z) = F^{-1}(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) =$$

$$= xF^{-1}(1,0,0) + yF^{-1}(0,1,0) + zF^{-1}(0,0,1) = x(1,0,0) + y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + z(0,0,1) =$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2}, -\frac{y}{2} + z\right) = \left(\frac{2x+y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{-y+2z}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{2}(2x+y, y, -y+2z)$$

Ficando, assim, determinado o isomorfismo inverso da transformação linear F.