# Exemplo - Isomorfismo e Automorfismo

**Exemplo 1:** *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por:* $T(x, y) = (x - 2y, y)$ *é um isomorfismo (automorfismo do* $\mathbb{R}^2$*).*

Para mostrar que $T$ é injetora, basta determinar o núcleo de $T$. Um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo se:

$$T(x, y) = (x - 2y, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$ e portanto, $T$ é injetora. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos: $dim(\mathbb{R}^2) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(T))$. Logo, como a dimensão da imagem de $T$ é igual a dimensão do espaço de chegada, então $T$ é sobrejetora.

Sendo injetora e sobrejetora, temos que $T$ é bijetora e portanto é um isomorfismo.

**Exemplo 2:** *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$$

*é um isomorfismo (automorfismo do* $\mathbb{R}^3$*).*

Vamos mostrar que $T$ é sobrejetora e injetora, assim mostrando que é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$.

Vamos determinar o núcleo de $T$. Um elemento do $\mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo se:

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e portanto, $T$ é injetora.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^3)$ e portanto, $T$ é sobrejetora.
Como $T$ é injetora e sobrejetora, ela é bijetora e logo, é um isomorfismo, e nesse caso, como os espaços vetoriais de saída e chegada são iguais, dizemos que $T$ é um automorfismo.

Se usarmos o teorema que diz que dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, eles tem a mesma dimensão, então o resultado seria imediato.

**Exemplo 3:** *Determinar o isomorfismo inverso de* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dado por:* $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$.

Vamos encontrar uma expressão para $T^{-1}$, o isomorfismo inverso de $T$. Lembrando que se $T^{-1}$ é isomorfismo inverso de $T$, então $T(u) = v \Rightarrow u = T^{-1}(v)$. Assim, supondo que $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$ temos que:

$$(x, y, z) = T(a, b, c) = (a - 3b - 2c, b - 4c, c) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b - 2c = x \\ b - 4c = y \\ c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x + 3y + 14z \\ b = y + 4z \\ c = z \end{cases}$$

Logo, temos: $T^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$, e esta é a expressão do isomorfismo inverso de $T$.

**Exemplo 4:** *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *dada por* $T(x,y,z) = (x, x-y, y-z, z)$ **NÃO** *é um isomorfismo.*

Um elemento pertence ao núcleo de $T$ se:

$$T(x,y,z) = (x, x-y, y-z, z) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,0)\}$ e portando $T$ é injetora. Porém, pelo teorema do núcleo e da imagem teremos: $dim(\mathbb{R}^3) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = 3$. O que implica que $Im(T) \neq \mathbb{R}^4$ e portanto, $T$ NÃO é sobrejetora, logo $T$ não é bijetora e não é um isomorfismo.

**Exemplo 5:** *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $T(x,y,z) = x + y + z$ **NÃO** *é um isomorfismo.*

De fato, $T$ não é injetora, pois um elemento pertence ao núcleo de $T$ se:

$$T(x,y,z) = x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(x,y,z) \mid x = -y - z\}$, logo $T$ NÃO é injetora, pois $dim(\mathcal{N}(T)) \neq 0$. Dessa forma, $T$ não é bijetora e portando não é um isomorfismo.

**Exemplo 6:** *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ *definida por:*

$$T(a,b,c) = (a-b) + (c-a)x + (b+c)x^2$$

*é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *em* $P_2(\mathbb{R})$.

Vamos mostrar que $T$ é injetora. Um elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo de $T$ se sua imagem pela transformação $T$ for o elemento neutro de $P_2(\mathbb{R})$, ou seja, se:

$$T(a,b,c) = (a-b) + (c-a)x + (b+c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & -b & & = & 0 \\ -a & & +c & = & 0 \\ & b & +c & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & -b & & = & 0 \\ & -b & +c & = & 0 \\ & b & +c & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & -b & & = & 0 \\ & -b & c & = & 0 \\ & & +2c & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,0)\}$ e portanto, $T$ é injetora.
Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos $dim(\mathbb{R}^3) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = 3$ logo $dim(Im(T)) = dim(P_2(\mathbb{R}))$ e portanto, $T$ é sobrejetora.

Como $T$ é injetora e sobrejetora ela é bijetora, logo é um isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $P_2(\mathbb{R})$.

Vamos determinar o isomorfismo inverso $T^{-1} : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Suponha que $T^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = (a,b,c)$. Logo, temos:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = T(a,b,c) = (a-b) + (c-a)x + (b+c)x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & -b & & = & \alpha_1 \\ -a & & +c & = & \alpha_2 \\ & b & +c & = & \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & -b & & = & \alpha_1 \\ & -b & +c & = & \alpha_2 + \alpha_1 \\ & b & +c & = & \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & -b & & = & \alpha_1 \\ & -b & c & = & \alpha_2 + \alpha_1 \\ & & +2c & = & \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 \end{cases}$$

Deste sistema linear obtemos $c = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2}$, $b = -\frac{(\alpha_2+\alpha_1-\alpha_3)}{2}$ e $a = \frac{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3}{2}$. Logo, temos:

$$T^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3}{2}, -\frac{(\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_3)}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)$$

$T^{-1}$ é uma transformação linear que leva um polinômio de grau menor ou igual que 2 em um vetor do $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 7:** *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (x, x - y, 2x - y - z)$. *Mostre que* $T$ *é inversível e determine o isomorfismo inverso.*

Para mostrar que $T$ é inversível, basta mostrar que é um isomorfismo, para isso mostramos que $T$ é injetora e sobrejetora.

Um elemento pertence ao núcleo de $T$ se:

$$T(x, y, z) = (x, x - y, 2x - y - z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e portanto, $T$ é injetora. Pelo teorema do núcleo e da imagem temos que $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^3)$ e portanto, $T$ é sobrejetora.

Desse forma, mostramos que $T$ é um isomorfismo. Vamos determinar o isomorfismo inverso $T^{-1}$. Suponha que $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$, logo temos que:

$$(x, y, z) = T(a, b, c) = (a, a - b, 2a - b - c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ a - b = y \\ 2a - b - c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = x - y \\ c = x + y - z \end{cases}$$

Assim, temos $T^{-1}(x, y, z) = (x, x - y, x + y - z)$ que é a expressão do isomorfismo inverso de $T$.

**Exemplo 8:** *Determinar um isomorfismo entre* $\mathbb{R}^2$ *e o subespaço* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ *do* $\mathbb{R}^3$.

Podemos ver que $dim(U) = dim(\mathbb{R}^2)$ e assim, já sabemos que eles são isomorfos. Vamos determinar um isomorfismo entre esses espaços vetoriais.
Por exemplo, a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x, y, 0)$ é linear e sua imagem é o subespaço $U$, pois nesse caso $z = 0$ na imagem por $T$. É fácil ver que $T$ é injetora.

Concluímos então que existe um isomorfismo $T$ de $\mathbb{R}^2$ em $U$ e então, esses espaços são isomorfos.

**Exemplo 9:** *Exiba um isomorfismo* $T$ *do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *no subespaço vetorial* $S$ *de* $\mathbb{R}^3$ *dado por:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

Para determinar um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $S$, basta determinarmos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que seja injetora, ou seja, que o núcleo possua apenas o elemento neutro do $\mathbb{R}^2$, e que sua imagem seja todo o subespaço $S$.

Vamos determinar uma base para $S$. Um elemento $(x, y, z)$ pertencente ao $\mathbb{R}^3$ está em $S$ se $x - y + 2z = 0 \Rightarrow x = y - 2z$, logo todo elemento de $S$ é escrito da forma:

$$(x, y, z) = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

Assim, $B_1 = \{(1,1,0), (-2,0,1)\}$ é um conjunto de geradores para $S$ e como são L.I., formam uma base para $S$.

Consideramos uma base qualquer para $\mathbb{R}^2$, por exemplo a base canônica $B_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ e agora basta definir a transformação $T$ levando a base canônica do $\mathbb{R}^2$ na base $B_1$ de $S$, da seguinte forma, por exemplo:

$$T(1,0) = (1,1,0), \qquad T(0,1) = (-2,0,1)$$

Dessa forma impomos que os elementos $(1,1,0)$ e $(-2,0,1)$ são geradores da imagem de $T$, mas eles formam uma base para $S$ e assim temos que $Im(T) = S$. Como nenhum elemento da base de $\mathbb{R}^2$ é levado no elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ temos que $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ e assim $T$ é injetora. Logo, $T$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}$ em $S$. De outro modo, pelo corolário do teorema do núcleo e da imagem, como impomos que $T$ levasse base de $\mathbb{R}^2$ em base de $S$, obtemos que $T$ é bijetora e portanto é um isomorfismo.

Vamos determinar a expressão do isomorfismo $T$. Temos que:

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(1,1,0) + y(-2,0,1) \Rightarrow T(x,y) = (x-2y, x, y)$$

$T$ é um dos isomorfismos entre $\mathbb{R}^2$ e $S$. Note que a resposta não é única e dependeu da escolha das bases para os dois espaços vetoriais e da escolha de quem seria levado em quem pela transformação $T$.