Exemplos - Intersecção de Subespaços Vetoriais

Exemplo 1: *Considere os subespaços* $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ *e* $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$. *A intersecção de* U *e* W *é:*

$$U \cap W = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\Big\}$$

Ou seja, $U \cap W = \{(0, 0)\}$.

Geometricamente, U é o eixo y dos eixos coordenados, pois são os elementos de $\mathbb{R}^2$ que tem a primeira coordenada nula e W é o eixo x, pois são os elementos de $\mathbb{R}^2$ que tem a segunda coordenada nula. Assim, a intersecção $U \cap W$ é a origem $(0, 0)$.

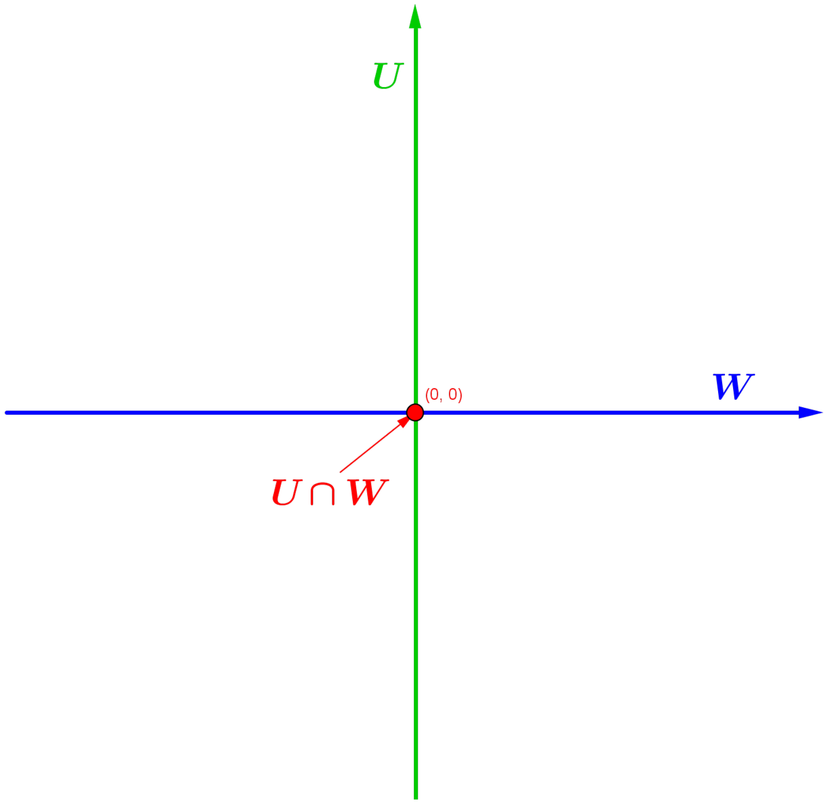

Figura 1: A origem $(0, 0)$ é a intersecção dos subespaços U e W.

Exemplo 2: *Dados os subespaços* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ *e* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. *A intersecção dos subespaços* U *e* W *é:*

$$U \cap W = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\Big\}$$

Geometricamente, U é o plano yz e W é o plano xy. A intersecção $U \cap W$ é a intersecção desses planos, que é o eixo y, que de fato, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

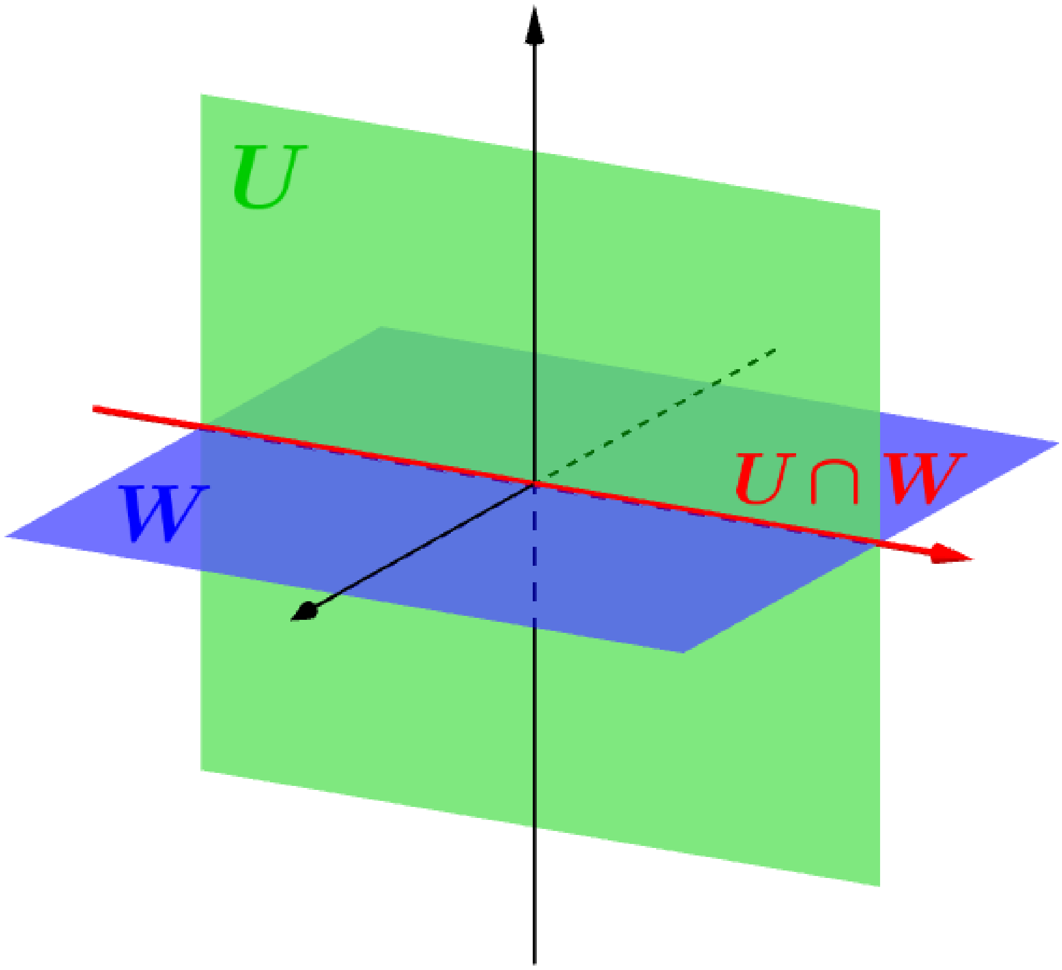

Figura 2: A intersecção dos subespaços U e W é o eixo y dos eixos coordenados.

Exemplo 3: *Considere os subespaços* $U = [(1,2,1),(0,1,-2)]$ *e* $W = [(2,0,-1),(1,2,1)]$ *de* $\mathbb{R}^3$*. A intersecção entre* U *e* W *é o subespaço:*

$$U \cap W = [(1,2,1)]$$

U é o plano, que passa pela origem, gerado pelos vetores $(1,2,1)$ e $(0,1,-2)$ e W é o plano, passando pelo origem, gerado pelos vetores $(2,0,-1)$ e $(1,2,1)$. A intersecção $U \cap W$ é a reta de intersecção dos dois planos, que é a reta, passando pela origem, gerada pelo vetor $(1,2,1)$.

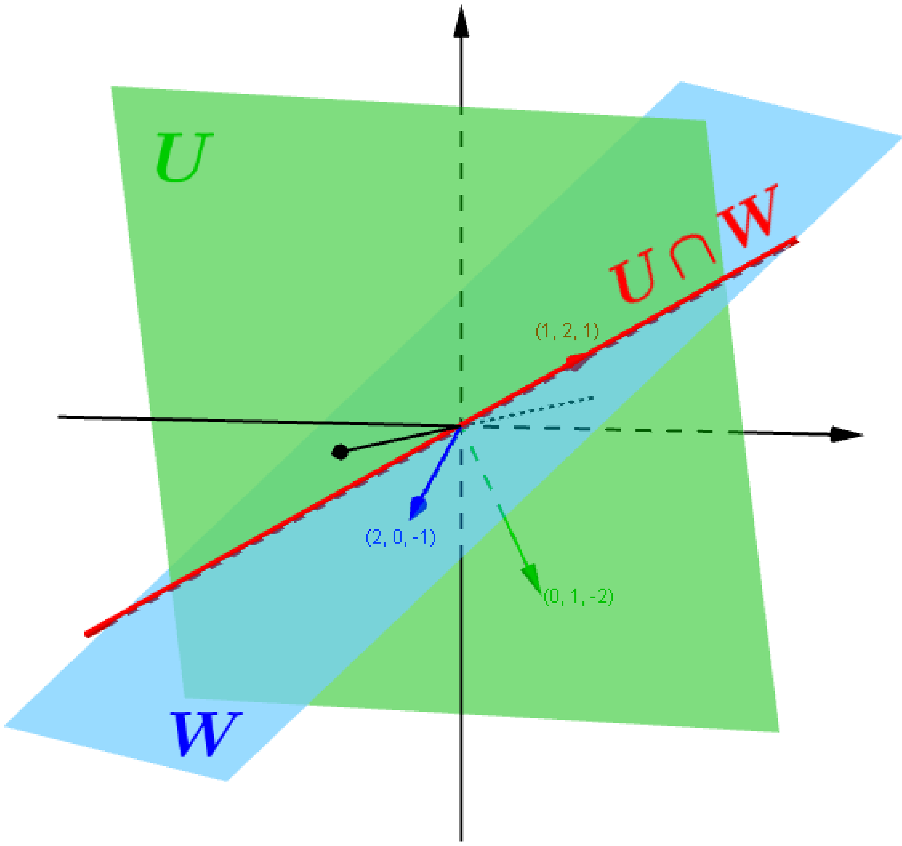

Figura 3: A intersecção dos planos U e W é uma reta.

Exemplo 4: *Sejam* $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ *e* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$ *subespaços de* $\mathbb{R}^4$*. Determine a intersecção* $U \cap W$*.*

Um elemento de $\mathbb{R}^4$, que pertence a intersecção de U e W deve satisfazer todas as condições dos dois conjuntos U e W ao mesmo tempo, ou seja, suas componentes devem satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \Longrightarrow x = -y \\ z - t = 0 \Longrightarrow z = t \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Substituindo a primeira e a segunda equações na terceira equação, teremos: $-y - y - t + t = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$. Assim, ficamos com as condições: $x = y = 0$ e $z = t$, com $z, t \in \mathbb{R}$ livres. Logo:

$$U \cap W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0 \text{ e } z = t\right\}$$

Podemos também dar um valor para a variável z que está livre, por exemplo $z = 1$, assim teremos $x = y = 0$ e $z = t = 1$, logo a intersecção $U \cap W$ será o subespaço gerado pelo vetor $(0, 0, 1, 1)$, ou seja, $U \cap W = [(0, 0, 1, 1)]$.

Exemplo 5: *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, das matrizes* $n \times n$*, e os subespaços:*

$$U = \left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\right\}$$

e

$$W = \left\{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = -B\right\}$$

A intersecção $U \cap W$ *é a matriz nula* $0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}$.

O conjunto U é o subespaço das matrizes simétricas, e W é o subespaço das matrizes antissimétricas, ou seja, uma matriz M que pertence a intersecção $U \cap W$ deve satisfazer:

$$M^t = M = -M$$

Mas a única matriz que satisfaz essa condição é a matriz nula $n \times n$.