# Exemplos - Espaços Vetoriais

**Exemplo 1:** *O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, com as operações de adição e multiplicação entre números reais usuais é um espaço vetorial real.*

**Exemplo 2:** *O conjunto $\mathbb{R}^n = \{v = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$, para $n = 1, 2, ...$ com as operações de adição definida por:*

$$u + v = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

*e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definida por:*

$$\alpha u = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

*é um espaço vetorial real.*

**Exemplo 3:** *O conjunto das matrizes reais $m \times n$, denotado $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, com a operação de adição entre matrizes e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial real. Por exemplo, as matrizes $2 \times 2$.*

Vamos verificar que o conjunto das matrizes de dimensão $2 \times 2$, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, satisfaz as condições de espaço vetorial:

(A) Tome A e B matrizes $2 \times 2$. Pela definição da adição entre matrizes temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Logo, o resultado da adição de duas matrizes $2 \times 2$ continua sendo uma matriz $2 \times 2$;

(A1) Tome A e B matrizes $2 \times 2$. Temos:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} = B+A$$

onde a passagem (1) pode ser feita pois cada elemento $a_{ij}$ e $b_{ij}$ são números reais, onde vale a comutatividade. Logo, A+B = B+A;

(A2) Tome A, B e C matrizes $2 \times 2$. Temos:

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix} = A + (B + C)$$

pois cada $a_{ij}, b_{ij}$ e $c_{ij}$ são números reais e para os números reais vale a associatividade;

(A3) Vamos achar o elemento neutro das matrizes $2 \times 2$, ou seja, uma matriz E $2 \times 2$ que somada com outra matriz A $2 \times 2$ resulta na própria matriz A.

$$A + E = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}+e_{11} & a_{12}+e_{12} \\ a_{21}+e_{21} & a_{22}+e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}+e_{11}=a_{11} \Rightarrow e_{11}=0 \\ a_{12}+e_{12}=a_{12} \Rightarrow e_{12}=0 \\ a_{21}+e_{21}=a_{21} \Rightarrow e_{21}=0 \\ a_{22}+e_{22}=a_{22} \Rightarrow e_{22}=0 \end{cases}$$

Logo, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz nula é o elemento neutro;

(A4) Para cada matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ existe a matriz $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$ tal que:

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, -A é a oposta de A, para toda matriz A;

(M) Tome A uma matriz $2 \times 2$ e $\alpha$ um escalar real. Pela definição de multiplicação de matriz por escalar temos:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Logo, a multiplicação de uma matriz $2 \times 2$ por um escalar real continua sendo uma matriz $2 \times 2$;

(M1)Tome A uma matriz $2 \times 2$ e $\alpha$ e $\beta$ escalares reais. Temos:

$$(\alpha\beta)A = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & (\alpha\beta)a_{12} \\ (\alpha\beta)a_{21} & (\alpha\beta)a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} (\beta a_{11}) & (\beta a_{12}) \\ (\beta a_{21}) & (\beta a_{22}) \end{bmatrix} = \alpha(\beta A)$$

Uma vez que vale a associatividade da multiplicação de números reais;

(M2) Tome A uma matriz e $\alpha$ e $\beta$ escalares reais. Temos:

$$(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{12} \\ (\alpha+\beta)a_{21} & (\alpha+\beta)a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \alpha a_{12}+\beta a_{12} \\ \alpha a_{21}+\beta a_{21} & \alpha a_{22}+\beta a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha A + \beta A$$

(M3) Seja A e B matrizes $2 \times 2$ e $\alpha$ um escalar, temos:

$$\alpha(A+B) = \alpha \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \alpha(a_{12}+b_{12}) \\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \alpha(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12} \\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

(M4)

$$1A = 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

Como o conjunto das matrizes $2 \times 2$ satisfaz todas as condições de espaço vetorial, mostramos que ele é um espaço vetorial. Podemos generalizar isso para matrizes de dimensão $m \times n$.

Nesse, e em outros exemplos, geralmente se usa as propriedades válidas de números reais (comutatividade, associatividade...) para se mostrar que valem as condições para os espaços vetoriais.

**Exemplo 4:** *O conjunto $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ é uma função$\}$, conjunto das funções reais, com a operação de adição definida por:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ ; \ \forall f, g \in F(\mathbb{R})$$

*e a operação de multiplicação por escalar definida por:*

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \ ; \ \forall f \in F(\mathbb{R}) \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

*é um espaço vetorial real.*

Vamos mostrar que valem as condições para $F(\mathbb{R})$ ser espaço vetorial, considerando $f, g, h \in F(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(A) A adição de duas funções continua sendo uma função $(f+g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, logo a operação de adição é fechada em $F(\mathbb{R})$;

(A1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$, uma vez que $f(x)$ e $g(x)$ são números reais;

(A2) $(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$, pois $f(x), g(x), h(x)$ são números reais;

(A3) O elemento neutro $e \in F(\mathbb{R})$ é uma função tal que $(f + e)(x) = f(x) \Rightarrow f(x) + e(x) = f(x) \Rightarrow e(x) = 0$, assim, o elemento neutro das funções é a função nula $e(x) = 0$;

(A4) A função oposta de $f$ é uma função $-f$, de modo que $(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 = e(x)$;

(M) A multiplicação de uma função real por um escalar real continua sendo uma função $(\alpha f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com a regra $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, logo a operação de multiplicação por escalar é fechada em $F(\mathbb{R})$;

(M1) $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f)(x) = (\alpha(\beta f))(x)$;

(M2) $((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x)$, uma vez que $\alpha, \beta, f(x) \in \mathbb{R}$;

(M3) $(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$;

(M4) $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

Assim, valem todas as propriedades, logo $F(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

**Exemplo 5:** *O conjunto* $V = \mathbb{R}^2$ *com operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:*
*Para todo* $v_1 = (a_1, b_1)$ *e* $v_2 = (a_2, b_2)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*
*Adição:* $v_1 + v_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, 0)$
*Multiplicação por escalar:* $\alpha v_1 = \alpha(a_1, b_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1)$
**NÃO** *é um espaço vetorial.*

Ocorre uma falha na condição (A3) do elemento neutro da adição. Para essa adição definida acima, vamos tentar achar o elemento neutro $e = (e_1, e_2)$, temos que ter:

$$v_1 + e = v_1 \iff (a_1, b_1) + (e_1, e_2) = (a_1, b_1) \iff (a_1 + e_1, 0) = (a_1, b_1)$$

Desse modo, $b_1 = 0$ para que a igualdade seja válida. Portanto, o elemento neutro não é válido para todos os elementos de $V$, apenas os da forma $(a_1, 0)$. Além disso, o termo $e_2$ do elemento neutro não participa da adição, ou seja, $e_2$ é livre e assim o elemento neutro não é único. Assim, a condição do elemento neutro falha e $V$ não pode ser um espaço vetorial.

**Exemplo 6:** *O conjunto* $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *com as seguintes operações em* $V$*:*

$$(A) \quad x + y = xy, \forall x, y \in V;$$
$$(M) \quad \alpha x = x^{\alpha}, \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

*é um espaço vetorial real.*

Vamos mostrar que valem as condições de espaço vetorial para $V$. Considerando $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

(A) Por definição $x + y = xy$, e como a multiplicação de dois números reais é um número real e $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow xy > 0$ temos que esse operação de adição em $V$ é fechada;

(A1) $x + y = xy = yx = y + x$, uma vez que a multiplicação de números reais é comutativa;

(A2) $(x + y) + z = (xy) + z = (xy)z \overset{(1)}{=} x(yz) = x + (yz) = x + (y + z)$, onde na passagem (1) foi usado a associatividade de números reais;

(A3) Seja $e$ o elemento neutro de $V$, temos que ter: $x + e = xe = x \Rightarrow e = 1_{\mathbb{R}}$. Assim, 1 é o elemento neutro de $V$;

(A4) Vamos achar o elemento $x'$ oposto de $x$. Temos que ter:

$$x + x' = e = 1 \Rightarrow xx' = 1 \Rightarrow x' \overset{(1)}{=} \frac{1}{x}$$

onde a passagem (1) só pode ser feita pois, por definição, se $x \in V$, então $x > 0$. Assim, $\frac{1}{x}$ (ou $x^{-1}$) é o oposto de $x$ em $V$.

(M) $x^{\alpha}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ é sempre positivo (já que $x > 0$) e é um número real. Logo, a multiplicação por escalar em $V$ é fechada;

(M1) $(\alpha\beta)x = x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha} = x^{(\beta)^\alpha} = \alpha x^\beta = \alpha(\beta x)$, onde foram usadas as propriedades da multiplicação entre os números reais $\alpha$ e $\beta$;

(M2) Lembramos que nessa condição a adição da distributiva é entre dois números $\alpha$ e $\beta$ reais, ou seja, a adição usual de $\mathbb{R}$. Temos:
$(\alpha+\beta)x = x^{(\alpha+\beta)} = x^\alpha x^\beta \overset{(1)}{=} x^\alpha + x^\beta = \alpha x + \beta x$. Na passagem (1) usamos a definição para a adição em $V$, já que $x^\alpha, x^\beta \in V$;

(M3) Aqui observe que a adição da distributiva é entre dois elementos $x, y \in V$, ou seja, é a adição definida em $V$. Temos:
$\alpha(x+y) = (x+y)^\alpha \overset{(1)}{=} (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \overset{(2)}{=} x^\alpha + y^\alpha = \alpha x + \alpha y$, em que nas igualdades (1) e (2) usamos a definição da operação de adição em $V$;

(M4) $1x = x^1 = x$.

Como valem todas as condições, mostramos que $V$, com as operações definidas anteriormente, é um espaço vetorial real.

**Exemplo 7:** *O conjunto $V = \mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:*
*Adição: $v_1 + v_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1, b_1)$;*
*Multiplicação por Escalar (usual de $\mathbb{R}^2$): $\alpha v_1 = \alpha(a_1, b_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1)$.*
**NÃO** *é um espaço vetorial.*

Vamos verificar se valem as condições para $V$ ser um espaço vetorial. As condições (M), (M1)-(M4) valem pois a multiplicação por escalar está definida como a multiplicação por escalar usual de $\mathbb{R}^2$. Verificamos para (A), (A1)-(A4):

(A) Tome $v_1 = (a_1, b_1) \in V$ e $v_2 = (a_2, b_2) \in V$, temos $v_1 + v_2 = v_1$, por definição, então $v_1 + v_2 \in V$. Logo, vale o fechamento da adição;

(A1) Tome $v_1 = (a_1, b_1) \in V$, $v_2 = (a_2, b_2) \in V$, temos: $v_1 + v_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1, b_1)$, mas $v_2 + v_1 = (a_2, b_2) + (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Logo, $v_1 + v_2 \neq v_2 + v_1$, assim a condição (A1) não é válida para $V$.

Além disso, também não é valida a condição do elemento neutro (A3), pois seja $e = (e_1, e_2)$, temos que ter:
$v_1 + e = (a_1, b_1) + (e_1, e_2) = (a_1, b_1)$, onde não podemos tirar nenhuma conclusão sobre $e_1$ e $e_2$, que ficam livres, ou seja, o elementro neutro $e$ não é único, logo, não podemos defini-lo para $v_1$.
Além disso, se comutarmos as parcelas teremos: $e + v_1 = e$, assim, não existe elemento neutro para $v_1$ nesse caso. Logo, existem infinitos elementos da forma $e = (e_1, e_2)$ que satisfazem $v_1 + e = v_1$, mas não existe nenhum que satisfaz $e + v_1 = v_1$, para algum $v_1 \in V$.

Como não valem algumas das condições, temos que $V$ não pode ser um espaço vetorial.