Exemplos - Diagonalização de Operadores Lineares

Exemplo 1: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (x, 2x + y)$. Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T. A matriz que representa T com relação a base canônica B do $\mathbb{R}^2$ é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é o polinômio característico de $(T)_B$ dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Os autovalores de T são as raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Observe que $\lambda = 1$ aparece duas vezes como raiz do polinômio característico de T, logo a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é igual a 2. Para este autovalor, temos:

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (x, 2x + y) = 1(x, y) \Leftrightarrow 2x + y = y \Leftrightarrow x = 0$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são da forma $v = (0, y) = y(0, 1)$. Uma base para o subespaço S_λ é $\{(0, 1)\}$, portanto $dim(S_\lambda) = 1$, logo a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é igual a 1. Observe que as multiplicidades algébrica e geométrica de um mesmo autovalor nem sempre são iguais.

Exemplo 2: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$T(x, y) = \lambda_1(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = 1(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

Os autovetores de T associados a λ_1 são da forma $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$. Para $\lambda_2 = -1$, temos:

$$T(x, y) = \lambda_2(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = -1(x, y) \Leftrightarrow y = -x$$

Assim, os autovetores de T associados a λ_2 são da forma $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$.
Considere dois autovetores de T, por exemplo, $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Esses vetores são linearmente independentes e como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, temos que $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores do operador T. Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de B, temos:

$$T(1, 1) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(1, -1)$$

$$T(1, -1) = (-1, 1) = 0(1, 1) - 1(1, -1)$$

Portanto, a matriz que representa T com relação a base B é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal, logo T é um operador diagonalizável. Observe que os elementos da diagonal de $(T)_B$ são os autovalores de T.

Exemplo 3: Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, -y, z)$ e a base canônica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. A matriz que representa T com relação a base B é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico de T é:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

As raízes do polinômio característico de T são:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade algébrica igual a 2 e $\lambda_2 = -1$ com multiplicidade algébrica igual a 1. Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$T(x, y, z) = \lambda_1(x, y, z) \Leftrightarrow (x + y, -y, z) = 1(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ -y = y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

Assim, os autovetores de T associados a $\lambda_1 = 1$ são da forma $v_1 = (x, 0, z) = x(1, 0, 0)+z(0, 0, 1)$. Observe que $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para o subespaço S_{λ_1}, logo a multiplicidade geométrica de λ_1 é igual a 2. Agora, para $\lambda_2 = -1$, temos:

$$T(x, y, z) = \lambda_2(x, y, z) \Leftrightarrow (x + y, -y, z) = -1(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -x \\ -y = -y \\ z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são da forma $v_2 = (x, -2x, 0) = x(1, -2, 0)$. Observe que $\{(1, -2, 0)\}$ é uma base para S_{λ_2}, logo a multiplicidade geométrica de λ_2 é igual a 1.
Considere então o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 0)\}$. Esse conjunto é linearmente independente, e como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, temos que $C = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 0)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, formada por autovetores de T. Portanto, T é um operador diagonalizável. Escrevendo as imagens dos elementos da base C, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de C, temos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0)$$

$$T(1, -2, 0) = (-1, 2, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) - 1(1, -2, 0)$$

Portanto, a matriz que representa T com relação a base C de autovetores é:

$$(T)_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal.

Exemplo 4: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, y)$. Tomando a base canônica B do $\mathbb{R}^2$, a matriz que representa T com relação a base B é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)$$

Assim, a raiz do polinômio característico é $\lambda = 1$, com multiplicidade 2. Logo, o operador T possui um autovalor $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica igual a 2. Nesse caso, temos:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow (x+y,y) = (x,y) \Leftrightarrow y = 0$$

Portanto, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = (x,0) = x(1,0)$. Uma base para S_λ é $\{(1,0)\}$, e assim, o autovalor λ tem multiplicidade geométrica igual a 1. Como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, observe que para formarmos uma base para o $\mathbb{R}^2$ com autovetores de T precisamos de 2 autovetores linearmente independentes, mas os únicos autovetores de T são da forma $x(1,0)$ e quaisquer dois que tomarmos serão linearmente dependentes, pois serão múltiplos um do outro. Logo, não podemos obter uma base para o $\mathbb{R}^2$ formada apenas por autovetores do operador linear T, assim T não é diagonalizável. Observe que as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor λ não são iguais.

Exemplo 5: Considere uma matriz diagonal A, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

É claro que A é uma matriz diagonalizável, bastando tomar como matriz diagonalizante I_2, a matriz identidade de ordem 2 e como matriz diagonal a própria matriz A. De fato, temos que:

$$A = IAI^{-1}$$

Logo, A é diagonalizável.

Exemplo 6: Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)$$

As raízes do polinômio característico são $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Portanto, A possui dois autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Para λ_1, temos que:

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$, temos que:

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1$$

Assim, os autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_2 = -2$ são da forma:

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{3x_1}{2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Observe que $(1, 0)$ e $(1, -\frac{3}{2})$ são linearmente independentes, portanto A possui 2 autovetores linearmente independentes, o que implica que a matriz A é diagonalizável. De fato, basta tomar a matriz diagonalizante U e a matriz diagonal D dadas por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observe que as colunas de U são os autovetores de A e a matriz diagonal D foi construída com os autovalores de A. Temos que A é semelhante a matriz D, ou seja, $A = UDU^{-1}$, de fato, podemos verificar que:

$$A = UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, A é uma matriz diagonalizável.

Exemplo 7: Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

As raízes do polinômio característico são:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \ \text{ ou } \ \lambda = 2$$

Assim, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores de A. Para o autovalor λ_1, temos que:

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -2x_2$$

Portanto, os autovetores de A associados ao autovalor λ_1 são da forma $X_1 = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para o autovalor $\lambda_2 = 2$, temos que:

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, os autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ são da forma $X_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Como os autovetores $(-2, 1)$ e $(1, 1)$ são linearmente independentes, temos que A é uma matriz diagonalizável, basta tomar U a matriz diagonalizante cujas colunas são os autovetores de A linearmente independentes e a matriz diagonal D cujos elementos da diagonal são os autovalores de A:

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De fato, podemos ver que:

$$A = UDU^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, A é uma matriz diagonalizável.