Exemplos - Combinação Linear

Exemplo 1: *O elemento* $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear dos elementos* $v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (0,1)$.

De fato, v pode ser escrito como:

$$v = (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1) = 4v_1 + 3v_2$$

Assim, existem os escalares $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_2 = 3$ tais que v pode ser escrito como $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Logo, v é combinação linear de v_1 e v_2.

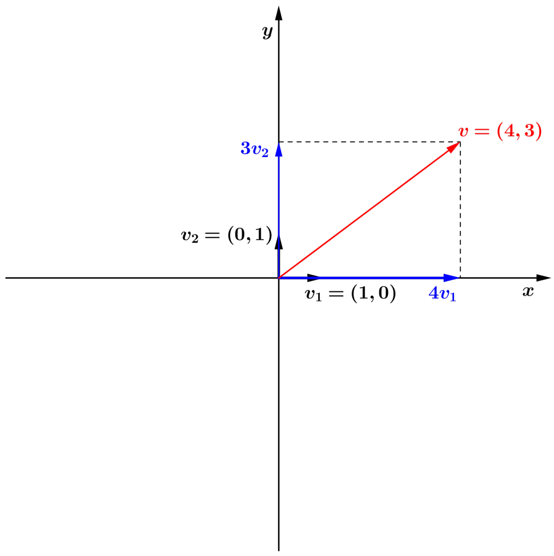

Figura 1: O vetor $v = (4,3)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$.

Exemplo 2: *Considere o mesmo vetor* $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ *do exemplo anterior, ele também pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $v_1 = (1,1)$ *e* $v_2 = (0,1)$ *da forma:*

$$v = (4,3) = 4(1,1) - 1(0,1)$$

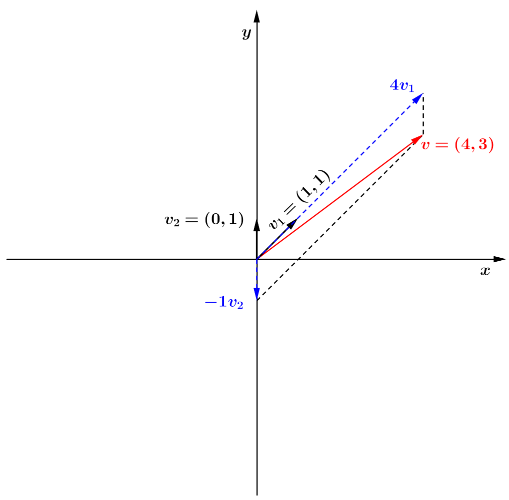

Figura 2: O vetor $v = (4,3)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (0,1)$.

Exemplo 3: *Dados os elementos* $v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (1,1)$ *e os escalares* $\alpha_1 = 2$ *e* $\alpha_2 = 3$*, o elemento:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 2(1,0) + 3(1,1) = (2+3, 0+3) = (2,3)$$

é combinação linear dos vetores v_1 *e* v_2*.*

Exemplo 4: *O elemento* $v = (2,4,-3) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos elementos* $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-1,0), v_3 = (0,0,2)$*.*

Para que v seja combinação linear de v_1, v_2, v_3 é preciso que existam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow (2,4,-3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,-1,0) + \alpha_3(0,0,2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ -\alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_3 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Assim, $\boxed{v = 2v_1 - 4v_2 - \frac{3}{2}v_3}$.

Exemplo 5: *Qualquer elemento* $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear de* $i = (1,0,0),\ j = (0,1,0)$ *e* $k = (0,0,1)$*.*

De fato, qualquer elemento $v = (a,b,c)$ pode ser escrito como:

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

com $a,b,c \in \mathbb{R}$. $i,\ j$ e k são chamados vetores canônicos do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6: *O elemento* $v = (7,8,9) \in \mathbb{R}^3$ *pode ser escrito como combinação linear de* $v_1 = (2,1,4),\ v_2 = (1,-1,3)$ *e* $v_3 = (3,2,5)$*.*

É preciso achar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de modo que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Longleftrightarrow (7,8,9) = \alpha_1(2,1,4) + \alpha_2(1,-1,3) + \alpha_3(3,2,5) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = & 7 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 8 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = & 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 8 \\ 21\alpha_2 - 7\alpha_3 = & -63 \\ -2\alpha_3 = & -6 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear cuja solução é: $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -2$ e $\alpha_3 = 3$.

Assim, $\boxed{v = 0v_1 - 2v_2 + 3v_3}$. Note que, como $\alpha_1 = 0$, podemos concluir que v também é combinação linear apenas de v_2 e v_3: $v = -2v_2 + 3v_3$.

Exemplo 7: *O polinômio* $p(x) = 3x^2 + x + 2$ *pode ser escrito como combinação linear dos polinômios* $p_1(x) = x^2, p_2(x) = x$ *e* $p_3(x) = 1$*.*

Neste caso, basta tomar como constantes os coeficientes do polinômio $p(x)$, assim temos:

$$p(x) = 3x^2 + x + 2 = 3p_1(x) + 1p_2(x) + 2p_3(x)$$

Logo, $p(x)$ é combinação linear dos elementos $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$. Em geral, qualquer polinômio de grau menor ou igual que 2 pode ser escrito como combinação linear destes polinômios.

Exemplo 8: *O elemento* $p(x) = 6x^2 + 11x + 6 \in P^2(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como combinação linear dos polinômios* $p_1(x) = 4x^2 + x + 2,\ p_2(x) = 3x^2 - x + 1$ *e* $p_3(x) = 5x^2 + 2x + 3$.

Vamos encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de modo que:

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) \Longrightarrow 6x^2 + 11x + 6 = \alpha_1(4x^2 + x + 2) + \alpha_2(3x^2 - x + 1) + \alpha_3(5x^2 + 2x + 3)$$

Para que os polinômios sejam iguais, basta que cada coeficiente de cada termo do polinômio seja igual. Obtemos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = & 6 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 11 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = & 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -5$ e $\alpha_3 = 1$.

Assim, $\boxed{p(x) = 4p_1(x) - 5p_2(x) + p_3(x)}$.

Exemplo 9: *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$*, pode ser escrita como combinação linear das matrizes:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Temos que encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = & 6 \\ 0 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -8 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = & -1 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = & -8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -3$.

Assim, $\boxed{A = A_1 + 2A_2 - 3A_3}$.