Exemplos - Base e Dimensão

Exemplo 1: $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, que chamamos de* **base canônica** *do* $\mathbb{R}^2$*.*

De fato, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I., uma vez que a equação:

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$$

só é possível para $\alpha_1=\alpha_2=0$. E além, disso, o conjunto gera todo o $\mathbb{R}^2$, uma vez que qualquer $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$.
Assim, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $dim(\mathbb{R}^2)=2$.

Exemplo 2: $\{(1,1),(0,1)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Tomando a equação:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,1)=(0,0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$$

Obtemos um sistema que tem solução: $\alpha_1=\alpha_2=0$. Logo, $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

Além disso, $\{(1,0),(0,1)\}$ gera todo o $\mathbb{R}^2$, uma vez que todo $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$. Assim, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Como era de se esperar, $dim(\mathbb{R}^2)=2$.

Exemplo 3: $\{(1,0),(0,1),(2,1)\}$ **NÃO** *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Podemos escrever o elemento $(2,1)$ como combinação linear de $(1,0)$ e $(0,1)$ da forma: $(2,1)=2(1,0)+1(0,1)\Rightarrow 2(1,0)+1(0,1)-1(2,1)=(0,0)$. Portanto, temos que $\{(1,0),(0,1),(2,1)\}$ não é L.I., logo não pode ser uma base para $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4: $\{(1,0,1),(2,0,0)\}$ **NÃO** *é uma base para* $\mathbb{R}^3$*.*

O conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0)\}$ é L.I., porém não gera todo o $\mathbb{R}^3$. Tome um $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}$, não podemos escrever qualquer elemento dessa forma como combinação linear de $\{(1,0,1),(2,0,0)\}$, uma vez que:

$$(x,y,z)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(2,0,0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=x\\ 0=y\\ \alpha_1=z\end{cases}$$

Ou seja, temos uma restrição para a coordenada y do vetor $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0)\}$ gera apenas os elementos da forma $(x,0,z)$, mas não gera todo o $\mathbb{R}^3$, portanto, não pode ser uma base para $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5: $\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$ *é uma base para o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$*.*

Vamos mostrar que o conjunto é L.I. Tomando a equação:

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,1,0)+\alpha_3(1,0,-1)=(0,0,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{escalonamento} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo, cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo, $\{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ é L.I.

Além disso, este conjunto gera todo o $\mathbb{R}^3$. Tomando um elemento $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrevê-lo como:

$$(x,y,z) = \beta_1(1,1,1) + \beta_2(-1,1,0) + \beta_3(1,0,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = x \\ \beta_1 + \beta_2 = y \\ \beta_1 - \beta_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = x \\ \beta_2 - 2\beta_3 = z - x \\ 3\beta_3 = y + x - 2z \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear que tem solução única. Dessa forma, podemos determinar os escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de modo que todo vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos $(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)$. Assim $\{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ gera todo $\mathbb{R}^3$ e é L.I. logo, é uma base para $\mathbb{R}^3$.

Portanto, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Exemplo 6: $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n,* $P_n(\mathbb{R})$*, conhecida como* **base canônica** *de* $P_n(\mathbb{R})$.

De fato, o conjunto $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ é L.I. uma vez que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$$

só vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n+1} = 0$, uma vez que dois polinômios só são iguais se todos os coeficientes são iguais.

Além disso, $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ gera todo o espaço de polinômios de grau menor ou igual que n, uma vez que qualquer $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ pode ser escrito como: $\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + ... + \beta_n x^n$. Logo, $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ é uma base $P_n(\mathbb{R})$.

Portanto, $dim(P_n(\mathbb{R})) = n + 1$.

Exemplo 7: $\{(0,1,2), (1,1,1), (0,2,0), (2,5,4)\}$ **NÃO** *é uma base para* $\mathbb{R}^3$*, mas podemos extrair uma base para* $\mathbb{R}^3$ *desse conjunto.*

De fato, podemos verificar que: $(2,5,4) = (0,1,2) + 2(1,1,1,) + (0,2,0)$, ou seja, $(2,5,4)$ é combinação linear dos demais elementos do conjunto, o que faz com que o conjunto seja L.D. e não possa ser uma base para $\mathbb{R}^3$.

Podemos extrair o elemento $(2,5,4)$ desse conjunto e assim, $\{(0,1,2), (1,1,1), (0,2,0)\}$ será L.I., uma vez que, tomando a equação:

$$\alpha_1(0,1,2) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,2,0) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, logo o conjunto é L.I.

Como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e $\{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0)\}$ possui três elementos e é L.I., logo forma uma base para $\mathbb{R}^3$, pois se não formasse, pelo Teorema 4 (Completamento) poderíamos completá-lo até formar uma base, mas caso isso ocorra, formaríamos uma base com mais de três elementos, o que contradiz o Teorema 3, de que qualquer base para um espaço vetorial tem o mesmo número de elementos. Assim, $\{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 8: *Determine uma base para o subespaço* $S = \left\{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^t = M\right\}$ *de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, *subespaço das matrizes simétricas de ordem* 2×2.

Vamos determinar um conjunto de geradores para S. Qualquer matriz simétrica de ordem 2×2 é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto de geradores para o subespaço S.

Tomando a equação:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Dessa forma, a equação só tem a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e portanto, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é Linearmente Independente, e gera o subespaço S, logo forma uma base para S.

Portanto, $dim(S) = 3$.