Exemplos - Autovalores e Autovetores

Exemplo 1: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (3x, 3y)$. Queremos encontrar elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $(x,y) \neq (0,0)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow (3x,3y) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = 3x \\ \lambda y = 3y \end{cases}$$

O sistema é satisfeito para todo (x,y), quando $\lambda = 3$. Assim, todo elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $T(x,y) = 3(x,y)$. Portanto, qualquer $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Exemplo 2: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (-x, y+2x)$. Queremos encontrar os elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $(x,y) \neq (0,0)$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow (-x, y+2x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = -x \\ \lambda y = y + 2x \end{cases}$$

A primeira equação é satisfeita para todo x, quando $\lambda = -1$, substituindo esse valor de λ na segunda equação, temos que:

$$-y = y + 2x \Leftrightarrow -2y = 2x \Leftrightarrow y = -x$$

Dessa forma, todo elemento $v = (x, -x) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Exemplo 3: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (y,x)$, que representa a reflexão em torno da reta $y = x$. Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T. Queremos elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow (y,x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = y \\ \lambda y = x \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos que:

$$\lambda x = y \Leftrightarrow \lambda(\lambda y) = y \Leftrightarrow \lambda^2 y - y = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Portanto, $\lambda = 1$ é um autovalor de T e nesse caso os autovetores associados satisfazem $x = y$, ou seja, qualquer vetor da forma (x,x) é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$.
Para $\lambda = -1$ os autovetores associados satisfazem $x = -y$, ou seja, qualquer vetor da forma $(x,-x)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Exemplo 4: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (-y,x)$, que representa uma rotação de ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário. Fazendo:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow (-y,x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = -y \\ \lambda y = x \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira teremos $\lambda(\lambda y) = -y \Leftrightarrow (\lambda^2+1)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1$. Assim, não existem valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaçam $T(x,y) = \lambda(x,y)$, ou seja, nenhum vetor $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é levado por T em um múltiplo de si mesmo. Portanto, o operador linear T não possui autovalores e nem autovetores.

Exemplo 5: Sejam V um espaço vetorial real e T um operador idempotente sobre V, isto é, $T^2 = T \Leftrightarrow T(T(v)) = T(v)$, para todo $v \in V$. Os autovalores de T são sempre $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. De fato, os autovetores de T são elementos $v \in V$, $v \neq e_V$, tais que:

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(T(v)) = \lambda v \Leftrightarrow T(\lambda v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda(\lambda v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda^2 v = \lambda v$$

É claro que para $\lambda = 0$ a equação é satisfeita e portanto, $\lambda_1 = 0$ é um autovalor de T. Agora, se $\lambda \neq 0$, temos que:

$$\lambda^2 v = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v = v \Leftrightarrow \lambda = 1$$

E portanto, $\lambda_2 = 1$ é o outro autovalor de T.

Exemplo 6: Sejam V um espaço vetorial real e T um operador auto-reflexivo sobre V, isto é, $T^2 = I_V$, com I_V a transformação identidade em V. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. De fato, queremos elementos $v \in V$, $v \neq e_V$, tais que $T(v) = \lambda v$. Temos que:

$$T^2(v) = I_V(v) \Leftrightarrow T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v = v \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Portanto, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores de T.

Exemplo 7: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, que representa a projeção sobre o plano xy. Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T. Queremos encontrar elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \Leftrightarrow (x,y,0) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda x = x \\ \lambda y = y \\ \lambda z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\lambda - 1)x = 0 \\ (\lambda - 1)y = 0 \\ \lambda z = 0 \end{array} \right.$$

A primeira e segunda equações são satisfeitas para $\lambda = 1$ e nesse caso, a terceira equação só se verifica para $z = 0$. Assim, $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de T com os autovetores associados da forma $v_1 = (x, y, 0)$. Observe que, para o autovetor $\lambda_1 = 1$, os elementos do subespaço S_{λ_1} podem ser escritos como $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$. Temos que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ são L.I. e portanto formam uma base para S_{λ_1}, e este tem dimensão 2.
Além disso, a terceira equação é satisfeita para $\lambda = 0$, para todo z, e nesse caso, a primeira e segunda equações só são satisfeitas para $x = y = 0$. Assim, $\lambda_2 = 0$ é outro autovalor de T com os autovetores associados da forma $v_2 = (0, 0, z)$. Observe que, para $\lambda_2 = 0$, os elementos de S_{λ_2} podem ser escritos da forma $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$. Temos que, $\{(0, 0, 1)\}$ é L.I. e portanto forma uma base para S_{λ_2}, e este tem dimensão 1.

Exemplo 8: Vamos determinar um operador linear T sobre o $\mathbb{R}^2$ que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:
(i) $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de T com autovetores associados do tipo $v_1 = (y, -y)$.
(ii) $\lambda_2 = 3$ é um autovalor de T com autovetores associados do tipo $v_2 = (0, y)$.

Da condição (i) temos que:

$$T(y, -y) = 1(y, -y) \Leftrightarrow yT(1, -1) = y(1, -1) \Leftrightarrow T(1, -1) = (1, -1)$$

e da condição (ii) temos que:

$$T(0, y) = 3(0, y) = (0, 3y) \Leftrightarrow yT(0, 1) = y(0, 3) \Leftrightarrow T(0, 1) = (0, 3)$$

Observe que $\beta = \{(1, -1), (0, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$. Vamos escrever um elemento qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos elementos da base β, ou seja:

$$(x, y) = \alpha_1(1, -1) + \alpha_2(0, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = x \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = x + y \end{array} \right.$$

Logo, temos $(x, y) = x(1, -1) + (x + y)(0, 1)$. Portanto, podemos calcular $T(x, y)$ da seguinte forma:

$$T(x, y) = T(x(1, -1) + (x + y)(0, 1)) = T(x(1, -1)) + T((x + y)(0, 1)) =$$

$$= xT(1, -1) + (x + y)T(0, 1) = x(1, -1) + (x + y)(0, 3) = (x, -x) + (0, 3x + 3y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(x, y) = (x, 2x + 3y)$$

E assim determinamos o operador linear T.