Exemplos - Álgebra das Transformações Lineares

Exemplo 1: *Considere F, G e H operadores lineares em $\mathbb{R}^2$, dados por: $F(x,y) = (x, 2y)$, $G(x,y) = (y, x+y)$, $H(x,y) = (0,x)$. Determinar: $F+G$, $F+3G-H$, $F\circ G$, $G\circ F$, $G\circ(H+F)$, $G\circ H$, $H\circ F$, $H\circ G\circ F$ e $G\circ F\circ H$.*

Neste caso, todas as aplicações estão bem definidas, pois F, G e H são ambos operadores lineares de $\mathbb{R}^2$. Assim, temos:

- $(F+G)(x,y) = F(x,y) + G(x,y) = (x,2y) + (y, x+y) = (x+y, x+3y)$;
- $(F+3G-H)(x,y) = F(x,y)+3G(x,y)-H(x,y) = (x,2y)+3(y,x+y)-(0,x) = (x+3y, 2x+5y)$;
- $(F\circ G)(x,y) = F(G(x,y)) = F(y, x+y) = (y, 2x+2y)$;
- $(G\circ F)(x,y) = G(F(x,y)) = G(x,2y) = (2y, x+2y)$;
- $(G\circ(H+F))(x,y) = G((H+F)(x,y)) = G(H(x,y)+F(x,y)) = G((0,x)+(x,2y)) = G(x, x+2y) = (x+2y, 2x+2y)$;
- $(G\circ H)(x,y) = G(H(x,y)) = G(0,x) = (x,x)$;
- $(H\circ F)(x,y) = H(F(x,y)) = H(x,2y) = (0,x)$;
- $(H\circ G\circ F)(x,y) = H(G(F(x,y))) = H(G(x,2y)) = H(2y, x+2y) = (0, 2y)$;
- $(G\circ F\circ H)(x,y) = G(F(H(x,y))) = G(F(0,x)) = G(0,2x) = (2x,2x)$.

Exemplo 2: *O operador linear de projeção sobre o eixo x:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,0) \end{array}$$

é um operador idempotente.

De fato, temos que:

$$T^2(x,y) = (T\circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,0) = (x,0)$$

Assim, $T^2 = T$ e o operador é idempotente. Observe que com a transformação T, cada elemento (x,y) é projetado no eixo x e, uma vez no eixo x, sua projeção coincide com ele mesmo.

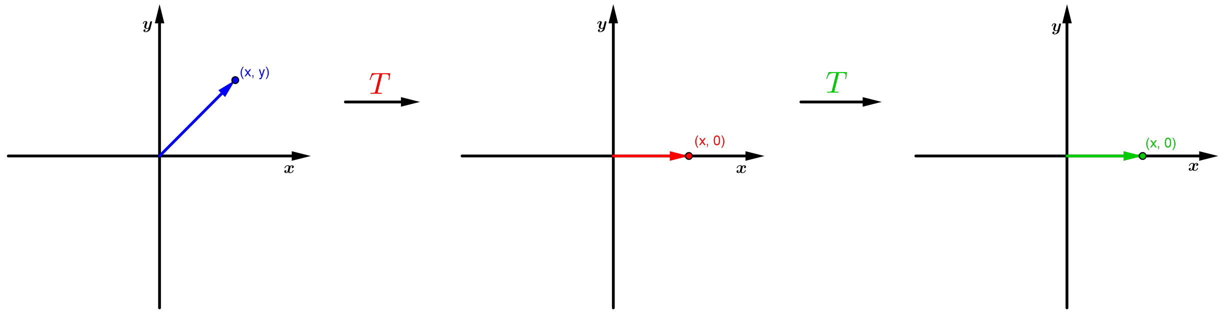

Figura 1: O operador linear T é um operador idempotente.

Exemplo 3: *O operador linear de reflexão em torno do eixo x:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,-y) \end{array}$$

é um operador auto-reflexivo.

De fato, temos que:

$$T^2(x,y) = (T \circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,-y) = (x,-(-y)) = (x,y)$$

Assim, $T^2 = I$ e o operador é auto-reflexivo. Observe que com a transformação T, cada elemento (x,y) é refletido com relação ao eixo x e, uma vez refletido, sua reflexão volta a ser o próprio elemento (x,y).

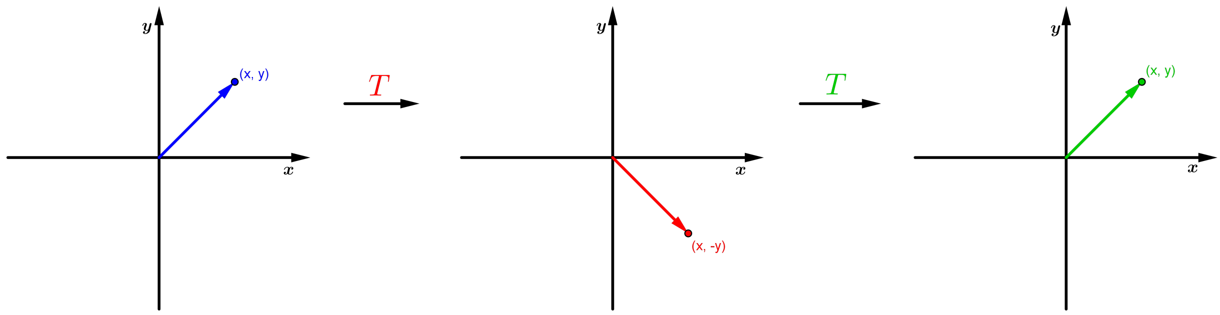

Figura 2: O operador linear T é um operador auto-reflexivo.

Exemplo 4: *O operador linear do $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (0,0,x)$ é um operador nilpotente.*

De fato, temos que:

$$T^2(x,y,z) = (T \circ T)(x,y,z) = T(T(x,y,z)) = T(0,0,x) = (0,0,0)$$

Assim, $T^2 = E$, com E a transformação nula, logo, T é nilpotente.

Exemplo 5: *Considere os operadores lineares do $\mathbb{R}^2$ dados por: $F(x,y) = (-x,-y)$ e $G(x,y) = (2x,2y)$. Determine $F \circ G$.*

A aplicação $F \circ G$ está bem definida. Temos que:

$$(F \circ G)(x,y) = F(G(x,y)) = F(2x,2y) = (-2x,-2y)$$

O operador G é uma expansão, o vetor (x,y) é levado num vetor de mesma direção e sentido, mas com o dobro de tamanho. O operador F é a reflexão em torno da origem $(0,0)$. Logo, $F \circ G$ é a composição de uma expansão com uma reflexão em torno da origem.

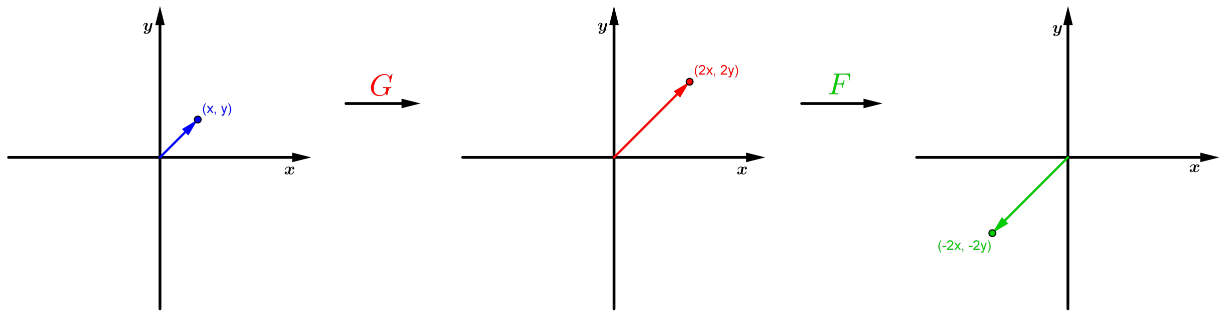

Figura 3: $F \circ G$ é a composição de uma expansão com uma reflexão em torno da origem.

Exemplo 6: *Considere as transformações lineares* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:* $F(x, y) = x - 2y$ *e* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:* $G(x) = 2x$. *Determine, se possível, as aplicações* $F + G$, $F \circ G$ *e* $G \circ F$.

Note que as aplicações $F + G$ e $F \circ G$ não estão definidas, uma vez que não podemos somar um elemento em $\mathbb{R}$ com um elemento em $\mathbb{R}^2$, e como G vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e F tem domínio em $\mathbb{R}^2$, não podemos definir $F \circ G$. Assim, podemos determinar apenas $G \circ F$:

$$(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x - 2y) = 2(x - 2y) = 2x - 4y$$