Teorema - Transformação Injetora

Teorema: *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Então, T é* **injetora** *se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$, ou seja, se o núcleo de T possui apenas o elemento neutro do domínio U.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetora. Isto é, $T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$, para todo $u_1, u_2 \in U$.

Considere $u \in \mathcal{N}(T)$, assim, $T(u) = e_V$, Mas, como T é transformação linear, sabemos que $T(e_U) = e_V$. Logo, $T(u) = T(e_U)$. Usando a hipótese de que T é injetora, temos que $u = e_U$. Assim, o núcleo de T possui apenas o elemento neutro de U, ou seja, $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$.

($\Leftarrow$) Supondo agora que $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$. Dados $u_1, u_2 \in U$ e como T é transformação linear, temos que:

$$T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow T(u_1) - T(u_2) = e_V \Rightarrow T(u_1 - u_2) = e_V \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathcal{N}(T)$$

Mas, como, por hipótese, o núcleo da transformação T tem apenas o elemento neutro de U, temos que ter:

$$u_1 - u_2 = e_U \Rightarrow u_1 = u_2$$

Assim, chegamos a implicação $T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$, o que mostra que T é injetora.