Teorema - Espaços Vetoriais Isomorfos

Teorema: *Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, $dim(U) = dim(V)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como U e V são isomorfos, existe o isomorfismo $T : U \longrightarrow V$. Por ser isomorfismo, T é injetora, e assim $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$. Além disso, T é sobrejetora, assim, $dim(Im(T)) = dim(V)$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$dim(U) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(U) = dim(V)$$

.
($\Leftarrow$) Assumindo que $dim(U) = dim(V)$. Sejam $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base para U e $B_2 = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base para V. Seja a aplicação: $T : U \longrightarrow V$ definida por: $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Pelo Lema anterior, T é transformação linear. Vamos verificar se T é injetora.

Considere $w \in \mathcal{N}(T)$, isto é, $T(w) = e_V$. Temos: $e_V = T(w) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. E, como os elementos v_i pertencem a base B_2 de V, eles formam um conjunto L.I., e portanto temos: $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., n$. Logo, $w = e_U$ e assim, $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$ e T é injetora.

Pelo corolário do teorema do núcleo e da imagem, temos que T é sobrejetora. Concluímos então que T é bijetora e portanto, é um isomorfismo e assim, os espaços U e V são isomorfos.