Teorema (Subespaços)

Um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, satisfaz as condições:

(i) O elemento neutro e de V está em S;
(ii) A operação de Adição definida em V é fechada em S, ou seja, $u+v \in S$, $\forall u, v \in S$;
(iii) A operação de Multiplicação por escalar de V é fechada em S, ou seja, $\alpha u \in S$, $\forall u \in S$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Prova: ($\Rightarrow$) Se S é espaço vetorial, então satisfaz todas as condições de espaço vetorial, em particular, satisfaz os fechamentos e a existência do elemento neutro.

($\Leftarrow$) Para S ser um espaço vetorial basta verificar as condições de espaço vetorial.
As condições (i), (ii) e (iii) do teorema equivalem as condições (A3), (A) e (M) de espaços vetoriais, respectivamente.

As condições (A1), (A2), (M1), (M2), (M3), (M4) valem em S, pois são válidas para quaisquer elementos de V.

Pela condição (i), temos que $\alpha u \in S$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, assim, tome $\alpha = -1_{\mathbb{K}}$, teremos $-1_{\mathbb{K}} u = -u \in S$, logo vale a propriedade (A4). Assim, todas as propriedades são satisfeitas, logo S é espaço vetorial.

Observação: Alguns autores preferem não incluir a condição (i) do teorema, que verifica se o elemento neutro está em S. Nesse caso é usada a condição (iii), de que a operação de multiplicação por escalar é fechada, tomando o cuidado de verificar que ela vale para $\alpha = 0$, ou seja, verificar que $0v \in S \ \forall v \in S$, logo por uma das propriedades de espaço vetorial teremos $0v = e \in S$, o que equivale a verificar que o elemento neutro e de V está em S.