Teorema - Soma de Subespaços

Teorema: *A Soma dos subespaços vetoriais U e W de V é também um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Vamos verificar que valem as condições para $U + W$ ser subespaço vetorial:

(i) O elemento neutro e de V, está em $U + W$, pois é soma dele com ele mesmo, uma vez que $e \in U$ e $e \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais. Temos, $e + e = e$, logo $e \in U + W$;

(ii) Tome $v_1 \in U + W$ e $v_2 \in U + W$, ou seja, $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$, para $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Temos:

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = u_1 + u_2 + w_1 + w_2$$

Mas, como U e W são subespaços vetoriais, temos que $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$. Logo, $v_1 + v_2$ é soma de um elemento de U com outro de W, assim, $v_1 + v_2 \in U + W$;

(iii) Tome $v \in U + W$ e $\alpha \in R$ um escalar. Temos que $v = u + w$, para algum $u \in U$ e $w \in W$. Assim:

$$\alpha v = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$$

Mas, $\alpha u \in U$ e $\alpha w \in W$, uma vez que U e W são subespaços vetoriais. Logo, αv é soma de um elemento de U com outro de W, assim, $\alpha v \in U + W$.

Portanto, mostramos que $U + W$ é um subespaço vetorial de V.