Teorema 1: sejam W um subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço com produto interno V, v um elemento de V e u a projeção ortogonal de v em W. Então, u é o elemento em W mais próximo de v, no seguinte sentido:

$$\|v-u\|_2 < \|v-w\|_2$$

para qualquer $w \in W$ distinto de u.

Demonstração: fixando o vetor $v \in V$ e denotando por $u \in W$ a projeção ortogonal de v em W, para cada elemento $w \in W$ podemos escrever:

$$v - w = v - w + u - u = (v-u) + (u-w)$$

Temos que $(u-w)$ está em W, pois é uma diferença de elementos em W e $(v-u)$ é ortogonal a W, de modo que $(v-u)$ e $(u-w)$ são ortogonais. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\|v-w\|_2^2 = \|v-u\|_2^2 + \|u-w\|_2^2$$

Como w é diferente de u, então o segundo termo nesta soma é estritamente positivo e, portanto:

$$\|v-w\|_2^2 > \|v-u\|_2^2 \Rightarrow \|v-w\|_2 > \|v-u\|_2$$

■

Teorema 2: Seja A uma matriz $m \times n$. Então, o espaço nulo de A e o espaço linha de A são complementos ortogonais, isto é, um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao espaço linha de A se, e somente se, $Av = 0$.

Demonstração: suponha que um elemento $v \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao espaço linha de A, isto é, v é ortogonal a cada vetor no espaço linha de A. Em particular, v é ortogonal aos vetores linha $a_1, a_2, ..., a_n$ de A, logo:

$$\langle a_1, v\rangle = \langle a_2, v\rangle = ... = \langle a_n, v\rangle = 0$$

O sistema linear $Ax = 0$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, x\rangle \\ \langle a_2, x\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, x\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, v satisfaz esse sistema e consequentemente pertence ao espaço nulo de A. Reciprocamente, suponha que v é um vetor do espaço nulo de A, ou seja, $Av = 0$. Segue que:

$$\langle a_1, v\rangle = \langle a_2, v\rangle = ... = \langle a_n, v\rangle = 0$$

Se u é um vetor qualquer do espaço linha de A, então ele pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores linha de A:

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$$

Assim,

$$\langle u, v\rangle = \langle(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n), v\rangle = \alpha_1\langle a_1, v\rangle + \alpha_2\langle a_2, v\rangle + ... + \alpha_n\langle a_n, v\rangle = 0$$

Portanto, v é ortogonal a todo vetor do espaço linha de A. ■