Teoremas - Polinômio Característico

Teorema: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Demonstração: Sejam A e B duas matrizes de ordem n semelhantes, isto é, existe uma matriz M de ordem n tal que: $A = M^{-1}BM$. Como $M^{-1}M = I_n$, temos que:

$$det(A - \lambda I_n) = det(M^{-1}BM - \lambda I_n) = det(M^{-1}BM - \lambda M^{-1}M) = det(M^{-1}(B - \lambda I_n)M) =$$

$$= det(M^{-1})det(B - \lambda I_n)det(M) = det(M^{-1})det(M)det(B - \lambda I_n) =$$

$$= det(M^{-1}M)det(B - \lambda I_n) = det(I_n)det(B - \lambda I_n) = det(B - \lambda I_n)$$

E assim, mostramos que $det(A - \lambda I_n) = det(B - \lambda I_n)$, ou seja, A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teorema: Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Considere B e C bases ordenadas para V. Então,

$$(T)_C = [M]_C^B \ (T)_B \ [M]_B^C$$

onde $[M]_B^C$ e $[M]_C^B$ são as matrizes de mudança da base B para a base C e de mudança da base C para a base B, respectivamente. Ou seja, as matrizes $(T)_B$ e $(T)_C$, que representam o operador linear T com relação as bases B e C, respectivamente, são semelhantes.

Demonstração: Seja $v \in V$. As coordenadas de v com relação as bases B e C são $[v]_B$ e $[v]_C$, respectivamente. Sabemos que $[v]_B = [M]_B^C \ [v]_C$, logo temos:

$$[T(v)]_B = (T)_B \ [v]_B = (T)_B \ [M]_B^C \ [v]_C$$

para todo $v \in V$. Assim, como $(T)_C = [M]_C^B \ (T)_B$, temos que:

$$[T(v)]_C = (T)_C \ [v]_C = [M]_C^B \ [T(v)]_B = ([M]_C^B \ (T)_B \ [M]_B^C) \ [v]_C \Rightarrow (T)_C = [M]_B^C \ (T)_B \ [M]_C^B$$

Assim, mostramos que duas matrizes que representam um mesmo operador linear, com relação a duas bases distintas, são semelhantes.

Teorema: Sejam V um espaço vetorial de ordem n e T um operador linear. Então, os autovalores λ de T são as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$ do operador linear T.

Demonstração: Os autovalores de T são os λ tais que $T(v) = \lambda v$, para algum $v \in V$, $v \neq e_V$. Como $v = I_V(v)$, com I_V a transformação identidade em V, temos:

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) = \lambda I_V(v) \Leftrightarrow T(v) - \lambda I_V(v) = e_V \Leftrightarrow (T - \lambda I_v)(v) = e_V$$

Essa última equação só possui solução não nula se $\mathcal{N}(T - \lambda I_V) \neq e_V$, ou seja, se o núcleo do operador linear $T - \lambda I_V$ não tiver somente o elemento neutro de V. Seja $(T)_B$ a matriz que representa o operador T, com relação a uma base qualquer B de V, então, a matriz $(T)_B - \lambda I_n$ representa o operador linear $T - \lambda I_V$. Desse modo, como $\mathcal{N}(T - \lambda I_V) \neq e_V$, o operador $T - \lambda I_V$ não é invertível e portanto a matriz que o representa em qualquer base também não será, isto é,

$$det((T)_B - \lambda I_n) = 0$$

Mas esse determinante é o polinômio característico da matriz $(T)_B$, que é o polinômio característico de T. Assim, λ é um autovalor de T se $p(\lambda) = 0$, ou seja, os autovalores de T são as raízes do polinômio característico de T.