Teorema 1: Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto ortogonal de elementos não nulos de um espaço vetorial com produto interno, então S é linearmente independente.

Demonstração: Considere a combinação linear nula:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = e_V$$

Para cada elemento v_i temos que:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \langle e_V, v_i \rangle = 0$$

Mas, pelas propriedades do produto interno segue que:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_i \rangle + ... + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = 0$$

Como S é um conjunto ortogonal, temos $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ para $j \neq i$. Logo, a equação acima se reduz a:

$$\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$$

Como v_i é não nulo e então $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, segue que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, ..., n$. Portanto, o conjunto S é linearmente independente. ■

Teorema 2: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortogonal de V e u um elemento qualquer de V. Então, podemos escrever o elemento u de modo único da forma:

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + ... + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$$

Demonstração: Como $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base para V, então um elemento $u \in V$ pode ser escrito de modo único da forma:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Para cada elemento v_i de B temos:

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_i \rangle + ... + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle$$

Como B é um conjunto ortogonal, temos $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ para $j \neq i$. Logo, a expressão acima se reduz a:

$$\langle u, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \Rightarrow \alpha_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

para $i = 1, ..., n$. Portanto, cada elemento $u \in V$ pode ser escrito de modo único da forma:

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + ... + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$$

■

No caso em que B é uma base ortonormal, temos $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$ e assim, cada elemento $u \in V$ pode ser escrito de modo único da forma:

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + ... + \langle u, v_n \rangle v_n$$

E $[u]_B = (\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, ..., \langle u, v_n \rangle)$ é o vetor de coordenadas de u em relação a base ortonormal B.

Teorema 3: Se $A : n \times n$ e $B : n \times n$ são matrizes ortogonais, então valem as seguintes propriedades:

(a) A^{-1} é ortogonal.
(b) AB é ortogonal.
(c) $det(A) = \pm 1$.

Demonstração: (a) Como A é ortogonal, temos que $A^{-1} = A^t$. Mas, $(A^{-1})^{-1} = A = (A^t)^t = (A^{-1})^t$ e, portanto, A^{-1} é ortogonal.

(b) Como A e B são ortogonais, temos que $AA^t = A^tA = I_n$ e $BB^t = B^tB = I_n$. Logo:

$$AB(AB)^t = ABB^tA^t = AA^t = I_n$$

$$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tB = I_n$$

Portanto, AB é ortogonal.

(c) Como A é ortogonal, então $AA^t = I_n$. Logo, temos que:

$$det(AA^t) = det(A)det(A^t) = det(I_n) = 1$$

Como $det(A) = det(A^t)$ segue que $det(A)^2 = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$. ■

Teorema 4: Seja $A : n \times n$ uma matriz. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é ortogonal;
(b) Os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal do $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno Euclidiano;
(c) Os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal do $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno Euclidiano.

Demonstração: Vamos demonstrar as equivalências $(a) \Leftrightarrow (b)$ e $(b) \Leftrightarrow (c)$:

$(a) \Leftrightarrow (b)$: Se A é ortogonal então $AA^t = I_n$. Mas, observe que a entrada b_{ij} da matriz $B = AA^t$ é o produto interno Euclidiano entre o i-ésimo vetor linha de A e o j-ésimo vetor coluna de A^t. Além disso, a i-ésima linha de A é igual a i-ésima coluna de A^t. Assim, sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ os vetores linha de A. O produto matricial AA^t pode ser expresso como:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^t & a_2^t & \cdots a_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \langle a_n, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $AA^t = I_n$ se, e somente se $\langle a_i, a_i \rangle = \|a_i\|^2 = 1$ para $i = 1, ..., n$ e $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, ou seja, se, e somente se, os vetores linha $a_1, a_2, ..., a_n$ de A são ortonormais.

$(b) \Leftrightarrow (c)$: Se os vetores linha de A são ortonormais, então pela implicação $(b) \Rightarrow (a)$ temos que A é ortogonal. Mas, se A é ortogonal então A^t também é. Pela implicação $(a) \Rightarrow (b)$ temos que os vetores linha de A^t formam um conjunto ortonormal. Como os vetores linha de A^t são iguais aos vetores coluna de A, segue que os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal. Reciprocamente, se os vetores coluna de A são ortonormais, então os vetores linha de A^t são ortonormais e, pela implicação $(b) \Rightarrow (a)$, segue que A^t é ortogonal. Mas, se A^t é ortogonal então A também é. Pela implicação $(a) \Rightarrow (b)$ temos que os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal. ■

Teorema 5: Sejam $A : n \times n$ uma matriz, x e y elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com produto interno. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é ortogonal;
(b) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ (A preserva ângulo);
(c) $\|Ax\| = \|x\|$ (A preserva norma).

Demonstração: Vamos provar as equivalências $(a) \Leftrightarrow (b)$ e $(b) \Leftrightarrow (c)$:

$(a) \Leftrightarrow (b)$: A é ortogonal se, e somente se, $AA^t = A^tA = I_n$. Logo, A é ortogonal se, e somente se:

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ay)^t(Ax) = y^tA^tAx = y^tx = \langle x, y\rangle$$

$(b) \Leftrightarrow (c)$: Considerando $x = y$ na parte (b), temos que:

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} \Leftrightarrow \|Ax\| = \|x\|$$

Agora, considerando $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

Assim:

$$\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \langle x, y\rangle$$

Supondo que $\|Ax\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos:

$$\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\|Ax+Ay\|^2 - \frac{1}{4}\|Ax-Ay\|^2 = \frac{1}{4}\|A(x+y)\|^2 - \frac{1}{4}\|A(x-y)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \langle x, y\rangle$$

o que completa a demonstração. ■