Teorema 1: Sejam $Ax = b$ e $Cx = d$ dois sistemas lineares. Se o segundo sistema é obtido aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre as equações do outro, ou seja, se a matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|c} C & d \end{array}\right]$ é obtida aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre as linhas da matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$, então os dois sistemas são equivalentes.

Demonstração: Vamos demonstrar que aplicando cada uma das operações elementares sobre as equações do sistema, não alteramos seu conjunto solução:

(i) Se $Cx = d$ é obtido permutando-se duas equações do sistema $Ax = b$, então eles ainda possuem as mesmas equações e é claro que possuem o mesmo conjunto solução.

(ii) Se $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ é solução da equação $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, multiplicando essa equação por um escalar $\alpha \neq 0$, obtemos:

$$\alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) = \alpha b_i \Leftrightarrow \alpha(a_{i1}x_1) + \alpha(a_{i2}x_2) + ... + \alpha(a_{in}x_n) = \alpha b_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha a_{i1})x_1 + (\alpha a_{i2})x_2 + ... + (\alpha a_{in})x_n = \alpha b_i$$

e $\bar{x}$ ainda é solução dessa nova equação. Logo, multiplicando-se uma equação do sistema por um escalar, o novo sistema possui o mesmo conjunto solução.

(iii) Sejam $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ e $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j$ duas equações distintas do sistema $Ax = b$, do qual $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ é solução. Se somarmos a equação i com a equação j multiplicada por um escalar α, temos:

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) + \alpha(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n) = b_i + \alpha b_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) + (\alpha a_{j1}x_1 + \alpha a_{j2}x_2 + ... + \alpha a_{jn}x_n) = b_i + \alpha b_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1}x_1 + \alpha a_{j1}x_1) + (a_{i2}x_2 + \alpha a_{j2}x_2) + ... + (a_{in}x_n + \alpha a_{jn}x_n) = b_i + \alpha b_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + ... + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n = b_i + \alpha b_j$$

E então, $\bar{x}$ é também uma solução dessa nova equação. Portanto, somando-se uma equação do sistema com outra multiplicada por um escalar, obtemos um novo sistema com mesmo conjunto solução. ■

Teorema 2: Sejam A uma matriz $m \times n$ e E uma matriz elementar, $m \times m$, que representa uma certa operação elementar de linhas. Então, a matriz $F = EA$ é a matriz obtida quando esta mesma operação elementar é aplicada sobre as linhas de A.

Demonstração: Faremos a demonstração em três partes, uma para cada operação elementar. Denotaremos por e_{ij}, com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., m$, o elemento na linha i e coluna j da matriz identidade I_m.

(a) A matriz E representa a operação elementar: permutar as linhas r e s. Neste caso, analisando as linhas de E:
(I) para as linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$, $i \neq s$ temos: $e_{ii} = 1$ e $e_{ij} = 0$, $j \neq i$.
(II) para a linha r temos: $e_{rr} = 0$, $e_{rs} = 1$ e $e_{rj} = 0$, $j \neq s$.
(III) para a linha s temos: $e_{ss} = 0$, $e_{sr} = 1$ e $e_{sj} = 0$, $j \neq r$.

Queremos mostrar que $F = EA$ corresponde a matriz A com as linhas r e s trocadas. Os elementos das linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$, $i \neq s$ de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik}a_{kj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

uma vez que, por (I), somente para $k = i$ teremos $e_{ii} = 1$ e as outras parcelas do somatório se anulam. Portanto, as linhas diferentes de r e s em F são iguais às linhas correspondentes de A. Os elementos da linha r de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{rj} = \sum_{k=1}^{m} e_{rk}a_{kj} = e_{rs}a_{sj} = a_{sj}$$

uma vez que, por (II), somente para $k = s$ teremos $e_{rs} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Portanto, a linha r de F é igual a linha s de A. Por fim, os elementos da linha s de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{sj} = \sum_{k=1}^{m} e_{sk}a_{kj} = e_{sr}a_{rj} = a_{rj}$$

uma vez que, por (III), somente para $k = r$ teremos $e_{sr} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Portanto, a linha s de F é igual a linha r de A. Assim, mostramos que F corresponde à matriz A com as linhas r e s trocadas.

(b) A matriz E representa a operação elementar: multiplicar a linha r por um escalar α não nulo. Neste caso, as linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$ de E são iguais às linhas correspondentes da matriz identidade I_m, ou seja, para todo $i \neq r$ temos: $e_{ii} = 1$ e $e_{ij} = 0$, $j \neq i$. Para a linha r temos: $e_{rr} = \alpha$ e $e_{rj} = 0$, $j \neq r$.

Queremos mostrar que $F = EA$ corresponde à matriz A com a linha r multiplicada pelo escalar α. Os elementos das linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$ de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik}a_{kj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

uma vez que $e_{ii} = 1$ e $e_{ik} = 0$, $k \neq i$. Portanto, as linhas diferentes de r em F são iguais as linhas correspondentes de A. Os elementos da linha r de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{rj} = \sum_{k=1}^{m} e_{rk}a_{kj} = e_{rr}a_{rj} = \alpha a_{rj}$$

uma vez que $e_{rr} = \alpha$ e $e_{rj} = 0$, $j \neq r$. Portanto, a linha r de F corresponde à linha r de A multiplicada pelo escalar α. Assim, mostramos que F corresponde à matriz A com a linha r multiplicada pelo escalar α.

(c) A matriz E representa a operação elementar: somar à linha r a linha s multiplicada por um escalar α não nulo. Neste caso, as linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$ de E são iguais as linhas correspondentes da matriz identidade I_m, ou seja, para todo $i \neq r$ temos: $e_{ii} = 1$ e $e_{ij} = 0$, $j \neq i$. Para a linha r temos: $e_{rs} = \alpha$, $e_{rr} = 1$ e $e_{rj} = 0$, $j \neq r$ e $j \neq s$.

Queremos mostrar que $F = EA$ corresponde a matriz A com a linha r somada com a linha s multiplicada pelo escalar α. Os elementos das linhas $i = 1, 2, ..., m$, $i \neq r$ de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik}a_{kj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

uma vez que $e_{ii} = 1$ e $e_{ik} = 0$, $k \neq i$. Portanto, as linhas diferentes de r em F são iguais às linhas correspondentes de A. Os elementos da linha r de F são da forma (para $j = 1, ..., n$):

$$f_{rj} = \sum_{k=1}^{m} e_{rk}a_{kj} = e_{rr}a_{rj} + e_{rs}a_{sJ} = a_{rj} + \alpha a_{sj}$$

uma vez que $e_{rr} = 1$, $e_{rs} = \alpha$ e os demais termos do somatório se anulam. Portanto, a linha r de F corresponde à linha r de A somada com a linha s multiplicada pelo escalar α. Assim, concluímos a demonstração.

Logo, a matriz $F = EA$ é obtida a partir de A realizando sobre ela a mesma operação elementar representada pela matriz E. ■

Teorema 3: Toda matriz elementar é invertível e a inversa é também uma matriz elementar.

Demonstração: Considerando a matriz identidade I_m e aplicando sobre suas linhas uma operação elementar obtemos uma matriz elementar E. Se quisermos recuperar a matriz identidade a partir de E basta aplicarmos sobre ela uma operação elementar inversa, que pode ser representada por uma matriz F, isto é, $FE = I_m$. Além disso, F também representa uma operação elementar aplicada sobre I_m, e a matriz identidade pode ser recuperada de F se aplicarmos sobre ela a operação representada por E, isto é, $EF = I_m$. Logo, temos:

$$EF = FE = I_m$$

e portanto, a matriz elementar E é invertível e F é sua inversa, que também é matriz elementar. ■