Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema do Núcleo e da Imagem: *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considerando a transformação linear $T : U \longrightarrow V$, então:*

$$dim(U) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T))$$

Ou seja, a soma das dimensões do núcleo e da imagem de T é igual a dimensão do domínio U.

Demonstração: Vamos considerar $B_1 = \{u_1, ..., u_r\}$ uma base para o núcleo de T, ou seja, $dim(\mathcal{N}(T)) = r$. O núcleo de T é um subespaço de U. Pelo teorema do completamento, a base B_1 pode ser completada até obtermos uma base para U, $B_2 = \{u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s\}$. Vamos mostrar que $B = \{T(v_1), ..., T(v_s)\}$ é uma base para a imagem de T.

Dado $v \in Im(T)$, então existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Mas, o elemento u pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base B_2 de U, ou seja,

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s$$

Assim, como T é transformação linear, temos:

$$v = T(u) = T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s) =$$

$$= \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_r T(u_r) + \beta_1 T(v_1) + ... + \beta_s T(v_s) = \beta_1 T(v_1) + ... + \beta_s T(v_s)$$

pois, como $u_1, ..., u_r$ pertencem ao núcleo de T, então $T(u_1), ..., T(u_r) = e_V$.
Assim, dado um $v \in Im(T)$, mostramos que ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto B, logo, $Im(T) = [\{T(v_1), ..., T(v_s)\}]$;

Falta mostrar que B é L.I. Considere a combinação linear nula:

$$\beta_1 T(v_1) + ... + \beta_s T(v_s) = e_V \Rightarrow T(\beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s) = e_V$$

Dessa forma, $\beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s \in \mathcal{N}(T)$. Logo, esse elemento pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base do núcleo, B_1:

$$\beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r \Rightarrow \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + ... + (-\beta_s) v_s = e_U$$

Como $B_2 = \{u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s\}$ é base de U, então é L.I., logo todos os escalares da última igualdade são nulos. Em particular, $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$. Assim, provamos que B é L.I. e gera a imagem de T, logo é uma base para $Im(T)$, desta forma $dim(Im(T)) = s$.

Como $dim(U) = r + s$, então:

$$dim(U) = r + s = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T))$$