Teorema - Núcleo

Teorema: *Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. O conjunto $\mathcal{N}(T)$, núcleo da transformação linear T é um subespaço vetorial de U.*

Demonstração: Vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{N}(T)$ satisfaz as condições para ser subespaço vetorial de U.

(i) Como T é transformação linear, sabemos que $T(e_U) = e_V$, logo e_U, elemento neutro de U, está no núcleo;

(ii) Considerando $u_1, u_2 \in \mathcal{N}(T)$, temos: $T(u_1) = e_V$ e $T(u_2) = e_V$, pois ambos estão no núcleo da transformação linear T. Assim, usando que T é transformação linear:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = e_V + e_V = e_V$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathcal{N}(T)$;

(iii) Considerando $u \in \mathcal{N}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, e que T é transformação linear, temos:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha e_V = e_V$$

uma vez que $u \in \mathcal{N}(T)$. Logo, $\alpha u \in \mathcal{N}(T)$.

Dessa forma, $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U.