Teoremas - Matriz de uma Transformação Linear

Teorema 1: *Sejam F e G transformações lineares pertencentes a $L(U,V)$ e, B e C bases de U e V, respectivamente, então:*

(a) $(F+G)_{B,C} = (F)_{B,C} + (G)_{B,C}$.

(b) $(\lambda F)_{B,C} = \lambda (F)_{B,C}$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstração: Considere $B = \{u_1, ..., u_n\}$ a base para U e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ a base para V. As imagens dos elementos da base B pelas transformações F e G pertencem a V, logo, podem ser escritas como combinação linear dos elementos da base C, assim:

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \quad \text{e} \quad G(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} v_i$$

com $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{K}$, para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.
Desse modo, temos que:

$$(F+G)(u_j) = F(u_j) + G(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) v_i$$

Portanto, pela definição da matriz de uma transformação linear, temos:
$(F+G)_{B,C} = (F)_{B,C} + (G)_{B,C}$.

Além disso, temos que:

$$(\lambda F)(u_j) = \lambda F(u_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij}) v_i$$

Portando, $(\lambda F)_{B,C} = \lambda (F)_{B,C}$.

Teorema 2: Considere U, V e W espaços vetoriais, com as respectivas bases B, C e D. Sejam $F : U \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow W$ transformações lineares. Então, a matriz da transformação linear composta $G \circ F : U \longrightarrow W$ é o produto da matriz da transformação G pela matriz da transformação F, isto é:

$$(G \circ F)_{B,D} = (G)_{C,D} (F)_{B,C}$$

Demonstração: Considere $B = \{u_1, ..., u_n\}, C = \{v_1, ..., v_m\}$ e $D = \{w_1, ..., w_p\}$ bases para U, V e W, respectivamente. Para cada elemento u_j da base B temos:

$$(G \circ F)(u_j) = G(F(u_j)) = G\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} G(v_i)$$

Mas, cada $G(v_i)$ pertence a W e pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base D. Então:

$$(G \circ F)(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} G(v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} w_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}\right) w_k$$

Assim, os coeficientes da matriz $(G \circ F)_{B,D}$ são dados por $\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$, que são os coeficientes da matriz obtida pelo produto $(G)_{C,D} (F)_{B,C}$.

Teorema 3: Considere U e V espaços vetoriais de mesma dimensão n, B e C bases para U e V, respectivamente. Seja T um isomorfismo de U em V. Então, a matriz $(T)_{B,C}$ é inversível e:

$$(T)_{B,C}^{-1} = (T^{-1})_{C,B}$$

Isto é, a inversa da matriz que representa T com relação as bases B e C é a matriz que representa T^{-1} com relação a estas mesmas bases.

Demonstração: Sabemos que $T(u) = v \Leftrightarrow T^{-1}(v) = u$, pois T é um isomorfismo. Então:

$$(T \circ T^{-1})(v) = T(T^{-1}(v)) = T(u) = v = I_V(v)$$

Onde I_V é o operador identidade de V em V. A matriz que representa o operador I_V com relação a base C é a matriz identidade de ordem n. Portanto:

$$I_n = (I_V)_C = (T \circ T^{-1})_C = (T)_{B,C}(T^{-1})_{C,B}$$

Analogamente, considerando a composta $T^{-1} \circ T : U \longrightarrow U$ temos:

$$I_n = (I_U)_B = (T^{-1} \circ T)_B = (T^{-1})_{C,B}(T)_{B,C}$$

Da definição de matriz inversa, segue que $(T)_{B,C}^{-1} = (T^{-1})_{C,B}$.

Teorema 4: Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões finitas n e m, respectivamente. Fixadas as bases $B = \{u_1, ..., u_n\}$ de U e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ de V, a aplicação $T : L(U, V) \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, que associa a cada transformação linear de $L(U, V)$ uma matriz em relação as bases B e C, é bijetora.

Demonstração: Supondo $F, G \in L(U, V)$. Se $(F)_{B,C} = (G)_{B,C}$, então as respectivas colunas de $(F)_{B,C}$ e $(G)_{B,C}$ são iguais e temos $F(u_j) = G(u_j)$, para $j = 1, ..., n$. Dado $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in U$, temos:

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(u_i) = G(u)$$

Assim, $F = G$ e portanto, a aplicação é injetora. Da própria definição de matriz de uma transformação linear, segue que a aplicação é sobrejetora. Logo, a aplicação é bijetora.