Lema - Espaços Vetoriais Isomorfos

Lema: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $dim(U) = n$ e $B = \{u_1, ..., u_n\}$ é uma base para U. Então, a aplicação $T : U \longrightarrow V$ definida por:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

para $v_1, ..., v_n \in V$, é uma transformação linear.

Demonstração: Sejam $w_1, w_2 \in U$. Podemos escrevê-los como combinação linear dos elementos da base B: $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e $w_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$. Temos que:

$$T(w_1 + w_2) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) + T(\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i) = T(w_1) + T(w_2)$$

Assim, mostramos que $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$. Considere $w \in U$ e $\gamma \in \mathbb{K}$. w pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base B da forma: $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Assim, temos:

$$T(\gamma w) = T\left(\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) v_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \gamma T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right)$$

Assim, mostramos que $T(\gamma w) = \gamma T(w)$. Portanto, concluímos que T é uma transformação linear.