Teorema - Isomorfismo

Teorema: *Se T é um isomorfismo de U em V, então existe $T^{-1}: V \longrightarrow U$ que também é um isomorfismo (de V em U).*

Demonstração: Se T é isomorfismo, então é bijetora, e portanto é sobrejetora, logo, para todo elemento $v \in V$ existe um $u \in U$ tal que $v = T(u)$ e este elemento u é único, pois T é injetora. Assim, a aplicação T^{-1} está definida. Vamos verificar se ela é uma transformação linear e também um isomorfismo.

(i) Como T é aplicação, todo elemento $u \in U$ tem sua imagem $v = T(u) \in V$. Logo, $u = T^{-1}(v)$ e portanto, para todo elemento $u \in U$ está associado algum elemento $v \in V$, assim, T é sobrejetora;

(ii) Considerando $v_1, v_2 \in V$ e $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2) = u$. Então, $T(u) = v_1$ e $T(u) = v_2$, o que implica que $v_1 = v_2$, pois T é injetora. Logo, $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$, portanto, T é injetora;

(iii) Sejam $v_1, v_2 \in V$. Como T^{-1} é sobrejetora, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $v_1 = T(u_1) \Leftrightarrow T^{-1}(v_1) = u_1$ e $v_2 = T(u_2) \Leftrightarrow T^{-1}(v_2) = u_2$. Assim, temos:

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = T^{-1}(T(u_1) + T(u_2)) = T^{-1}(T(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2 = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)$$

(iv) Sejam $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Como T^{-1} é sobrejetora, existe um $u \in U$ tal que $T(u) = v \Leftrightarrow u = T^{-1}(v)$. Assim, temos:

$$T^{-1}(\alpha v) = T^{-1}(\alpha T(u)) = T^{-1}(T(\alpha u)) = \alpha u = \alpha T^{-1}(v)$$

De (iii) e (iv) temos que T^{-1} é transformação linear e de (i)-(iv) concluímos que T^{-1} existe e é um isomorfismo de V em U.