Teorema - Imagem

Teorema: *Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. O conjunto $Im(T)$, imagem da transformação linear T é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Vamos mostrar que $Im(T)$ satisfaz as condições para ser subespaço vetorial de V:

(i) Como T é transformação linear, sabemos que $\mathcal{N}(T)$ tem pelo menos o elemento neutro de U, ou seja, $T(e_U) = e_V$, assim, existe pelo menos um elemento em U que é levado no elemento neutro de V pela transformação linear T, logo, $e_V \in Im(T)$;

(ii) Considerando $v_1, v_2 \in Im(T)$, temos que existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$, pois v_1 e v_2 estão na imagem de T. Assim, como T é transformação linear, temos:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2$$

Assim, existe o elemento $u_1 + u_2 \in U$ tal que $T(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$, logo, $v_1 + v_2 \in Im(T)$;

(iii) Considerando $v \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que existe um $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Como T é transformação linear, temos:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha v$$

Assim, existe o elemento $\alpha u \in U$ tal que $T(\alpha u) = \alpha v$, logo $\alpha v \in Im(T)$.

Dessa forma, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.