Propriedades e Teoremas - Espaços Vetoriais

Teorema 1: *O elemento neutro do espaço vetorial é único.*

Demonstração: Considere V um espaço vetorial e e_1 e e_2 elementos neutros da adição em V. Vamos demonstrar que $e_1 = e_2$.
(I) Se e_1 é elemento neutro de V e e_2 é um elemento qualquer, então temos: $e_2 + e_1 = e_2$, pela definição do elemento neutro;
(II) Agora, se e_2 é o elemento neutro de V e e_1 um elemento qualquer de V, temos: $e_1 + e_2 = e_1$.
Dessas duas igualdades, usando que a adição é comutativa no espaço vetorial V, temos:

$$e_2 = e_2 + e_1 = e_1 + e_2 = e_1 \Rightarrow e_2 = e_1$$

. Logo, o elemento neutro de um espaço vetorial é único.

Teorema 2: *Existe um único elemento oposto* $(-u)$ *para cada* $u \in V$.

Demonstração: Considere $u \in V$ e u_1 seu oposto. Então, $u + u_1 = e$, onde e é o elemento neutro de V.
Se u_2 também é elemento oposto de u, temos: $u + u_2 = e$.
Logo, temos:

$$u_1 = u_1 + e = u_1 + (u + u_2) = (u_1 + u) + u_2 = e + u_2 = u_2$$

Onde na primeira igualdade usamos a propriedade do elemento neutro, na segunda igualdade usamos que u_2 é elemento oposto de u, na terceira usamos a associatividade do espaço vetorial, na quarta usamos que u_1 é também elemento oposto de u e na última igualdade usamos novamente a propriedade do elemento neutro.

Um espaço vetorial satisfaz as propriedades:

(P1) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha e = e$, onde e é o elemento neutro da adição;

Prova: Temos que $\alpha e = \alpha(e + e) = \alpha e + \alpha e$. Como αe está em V ele possui elemento oposto $-(\alpha e)$. Somando o oposto de αe dos dois lados da igualdade anterior temos:
$(-(\alpha e)) + \alpha e = (-(\alpha e)) + (\alpha e + \alpha e) \Rightarrow e = ((-(\alpha e)) + \alpha e) + \alpha e \Rightarrow e = e + \alpha e \Rightarrow e = \alpha e.$

(P2) $0u = e$, para todo $u \in V$, com e o elemento neutro de V;

Prova: Temos que $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. Como $0u \in V$ ele possui elemento oposto $-(0u)$. Adicionando o elemento oposto de $0u$ dos dois lados da igualdade anterior teremos:
$(-(0u)) + 0u = (-(0u)) + (0u + 0u) \Rightarrow e = (-(0u) + 0u) + 0u \Rightarrow e = e + 0u \Rightarrow 0u = e.$

(P3) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $\alpha u = e$ só é possível se $\alpha = 0$ ou $u = e$;

Prova: (I) Supondo que $\alpha \neq 0$. Então, podemos dividir por α. Temos: $\alpha u = e \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha}u = \frac{e}{\alpha} \Leftrightarrow u = \frac{1}{\alpha}e \Leftrightarrow u = e$, onde na última implicação usamos a propriedade (P1), já que $\frac{1}{\alpha}$ é um escalar, que multiplicado pelo elemento neutro resulta no elemento neutro.
(II) Agora, supondo que $u \neq e$ iremos provar que $\alpha = 0$:
Se $\alpha = 0$ está demonstrado;
Se $\alpha \neq 0$, por (I) temos que $u = e$ o que é um absurdo, logo só podemos ter $\alpha = 0$.

(P4) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $u \in V$, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$;

Prova: Temos que:

$$\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0u = e$$

usando a condição M2 de espaços vetoriais e a propriedade P2.
Por outro lado, temos que:

$$\alpha u + (-(\alpha u)) = e$$

Assim, $\alpha u + (-(\alpha u)) = \alpha u + (-\alpha)u$, somando $-\alpha u$ dos dois lados obtemos: $-(\alpha u) = (-\alpha)u$.

Além disso, temos que:

$$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha(u + (-u)) = \alpha e = e$$

, pela condição M3 de espaços vetoriais e a propriedade P3. Por outro lado, como já vimos:

$$\alpha u + (-(\alpha u)) = e$$

Assim, $\alpha u + (-(\alpha u)) = \alpha u + \alpha(-u)$, somando $-\alpha u$ dos dois lados obtemos: $-(\alpha u) = \alpha(-u)$.
Portanto, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.

(P5) Para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$;

Prova: Usando a condição M2 e a propriedade P4 de espaços vetoriais, temos:

$$(\alpha - \beta)u = (\alpha + (-\beta))u = \alpha u + (-\beta)u = \alpha u + (-(\beta u)) = \alpha u - \beta u$$

.

(P6) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$;

Prova: Usando a condição M3 e a propriedade P4 de espaços vetoriais, temos:

$$\alpha(u - v) = \alpha(u + (-v)) = \alpha u + \alpha(-v) = \alpha u + (-(\alpha v)) = \alpha u - \alpha v$$

(P7) Para quaisquer β e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2, ..., u_r \in V$, $\beta \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{r} (\beta\alpha_i) u_i$.

Prova: Fazemos a prova por indução. A propriedade vale para $r = 2$, uma vez que:

$$\beta(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \beta\alpha_1 u_1 + \beta\alpha_2 u_2$$

pela condição M3 da multiplicação por escalar de espaços vetoriais.

Agora, supondo que a propriedade vale para $r = k$, ou seja:

$$\beta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} (\beta\alpha_i) u_i$$

Vamos mostrar que vale para $r = k + 1$. Temos:

$$\beta \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i = \beta \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \alpha_{k+1} u_{k+1} \right) = \beta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \beta\alpha_{k+1} u_{k+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\beta\alpha_i) u_i + (\beta\alpha_{k+1}) u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} (\beta\alpha_i) u_i$$

Onde na primeira igualdade usamos propriedades de somatório, na segunda que a propriedade P7 vale para $r = 2$, na terceira que a propriedade vale para $r = k$ e na última usamos novamente propriedade de somatório.