# Teoremas - Diagonalização de Operadores Lineares

**Teorema 1:** Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. $T$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base $B$ de $V$ formada por autovetores de $T$.

**Demonstração:** Suponha que $T$ é diagonalizável, ou seja, existe uma base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$ tal que $(T)_B$ é diagonal:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Tomando um elemento $v_j$ da base $B$, observe que, da maneira como é construída a matriz que representa $T$ com relação a base $B$, a coluna $j$ da matriz $(T)_B$ é formada pelos coeficientes de $T(v_j)$ escrito como combinação linear dos elementos da base $B$, ou seja:

$$T(v_j) = 0v_1 + ... + \lambda_j v_j + ... + 0v_n = \lambda_j v_j$$

Assim, $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para $j = 1, ..., n$. Logo, $v_j$ é um autovetor de $T$ associado ao autovalor $\lambda_j$ e portanto, a base $B$ é formada por autovetores de $T$.

Reciprocamente, suponha que $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base para $V$ formada por autovetores de $T$, isto é, $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para $j = 1, ..., n$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os respectivos autovalores do operador $T$. Como as imagens dos elementos $v_j$ da base $B$ pela transformação linear $T$, escritos como combinações lineares dos elementos de $B$, são da forma: $T(v_j) = \lambda_j v_j$, obtemos que:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa $T$ com relação a base $B$, que é uma matriz diagonal. Logo, $T$ é um operador diagonalizável.

**Teorema 2:** Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, com $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalores distintos de $T$ e $v_1, ..., v_k$ os autovetores associados, respectivamente. Então, $v_1, ..., v_k$ são linearmente independentes.

**Demonstração:** Faremos a demonstração por indução matemática. Para $k = 1$ é claro que $v_1$ é linearmente independente, uma vez que $v_1 \neq e_V$, pois $v_1$ é um autovetor de $T$. Agora, supomos que seja válido para $k$, ou seja, para $k$ autovalores distintos de $T$ os autovetores associados $v_1, ..., v_k$ são L.I. Vamos mostrar que é válido para $k + 1$, isto é, se $T$ possui $k + 1$ autovalores distintos, então os $k + 1$ autovetores associados são L.I. Considere a combinação linear nula:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = e_V$$

Aplicando o operador linear $T$ nesta equação e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, pois $\lambda_i$ são autovalores de $T$ associados aos autovetores $v_i$ para $i = 1, ..., k + 1$, obtemos:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = e_V$$

Multiplicando a primeira equação por $\lambda_{k+1}$ e subtraindo da segunda equação, temos:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + ... + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = e_V$$

Pela hipótese de indução, temos que $v_1, ..., v_k$ são linearmente independentes, assim temos que $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ para $i = 1, ..., k$. Mas $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ ou $\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0$. Como os autovalores de $T$ são distintos, isto é, $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i \neq k+1$, obtemos que $\alpha_i = 0$, para $i = 1, ..., k$. Substituindo na combinação linear nula:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = e_V \Rightarrow$$

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = e_V \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

uma vez que $v_{k+1} \neq e_V$, pois é um autovetor de $T$. Dessa forma, mostramos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, ..., k+1$, ou seja, $v_1, ..., v_k, v_{k+1}$ são linearmente independentes.

**Teorema 3:** Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T$ um operador linear sobre $V$. Então, $T$ é diagonalizável se, e somente se:
(i) o polinômio característico de $T$ possui todas as suas raízes em $\mathbb{K}$;
(ii) a multiplicidade algébrica de cada autovalor de $T$ é igual a sua multiplicidade geométrica.

**Demonstração:** Se $T$ é um operador diagonalizável, pelo teorema 1 temos que $V$ possui uma base formada por autovetores de $T$. Seja $B = \{v_{11}, ..., v_{1r_1}, ..., v_{k1}, ..., v_{kr_k}\}$ essa base, de modo que em cada $\{v_{i1}, ..., v_{ir_i}\}$ estão todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_i$, para $i = 1, ..., k$. A matriz que representa $T$ em relação a base $B$ é:

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de $T$ é portanto:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} ... (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

cujas raízes estão todas em $\mathbb{K}$.
Para cada índice $i$, $i = 1, ..., k$, seja $U_i$ o subespaço gerado por $\{v_{i1}, ..., v_{ir_i}\}$. Um elemento $u \in U_i$ é combinação linear de $v_{i1}, ..., v_{ir_i}$ e portanto, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_i$, ou seja, $u \in S_{\lambda_i}$. Logo, temos $U_i \subset S_{\lambda_i}$. Agora, tomando $u \in S_{\lambda_i}$ como combinação dos elementos de $B$:

$$u = \alpha_{11} v_{11} + ... + \alpha_{kr_k} v_{kr_k}$$

Multiplicando por $\lambda_i$ e utilizando que $T(u) = \lambda_i u$, uma vez que $u \in S_{\lambda_i}$, temos:

$$\lambda_i \alpha_{11} v_{11} + ... + \lambda_i \alpha_{1r_1} v_{1r_1} + ... + \lambda_i \alpha_{k1} v_{k1} + ... + \lambda_i \alpha_{kr_k} v_{kr_k} =$$

$$= \lambda_i u = T(u) = \alpha_{11} T(u_{11}) + ... + \alpha_{kr_k} T(u_{kr_k}) =$$

$$= \lambda_1 \alpha_{11} v_{11} + ... + \lambda_1 \alpha_{1r_1} v_{1r_1} + ... + \lambda_k \alpha_{k1} v_{k1} + ... + \lambda_k \alpha_{kr_k} v_{kr_k}$$

Comparando a primeira e última combinações lineares acima, obtemos:

$$\lambda_i \alpha_{11} = \lambda_1 \alpha_{11}, ..., \lambda_i \alpha_{1r_1} = \lambda_1 \alpha_{1r_1}$$
$$\vdots$$
$$\lambda_i \alpha_{k1} = \lambda_k \alpha_{k1}, ..., \lambda_i \alpha_{kr_k} = \lambda_k \alpha_{kr_k}$$

E assim:

$$\alpha_{11} = ... = \alpha_{1r_1} = ... = \alpha_{(i-1)1} = ... = \alpha_{(i-1)r_{(i-1)}} =$$
$$= \alpha_{(i+1)1} = ... = \alpha_{(i+1)r_{(i+1)}} = ... = \alpha_{k1} = ... = \alpha_{kr_k} = 0$$

Portanto, $u = \alpha_{i1}v_{i1} + ... + \alpha_{ir_i}v_{ir_i}$ e assim $u \in U_i$. Logo, temos $S_{\lambda_i} \subset U_i$. Dessa forma, mostramos que $U_i = S_{\lambda_i}$ para $i = 1, ..., k$, o que implica que $dim(S_{\lambda_i}) = dim(U_i) = r_i$ que é a multiplicidade algébrica de $\lambda_i$. Portanto, os autovalores de $T$ têm mesma multiplicidade algébrica e geométrica.

Reciprocamente, sabemos que os autovalores de $T$ são as raízes do polinômio característico de $T$. Como $V$ tem dimensão $n$, o polinômio característico de $T$ terá grau $n$ e se ele possui todas as suas raízes em $\mathbb{K}$, então, pelo teorema fundamental da álgebra, isso implica que $T$ possui $n$ autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, não necessariamente distintos. Como a multiplicidade algébrica de cada autovalor de $T$ é igual a sua multiplicidade geométrica, é possível associar a um mesmo autovalor um conjunto linearmente independente formado por autovetores, que será uma base para o subespaço $S_\lambda$. Além disso, os autovetores associados à autovalores distintos também serão linearmente independentes, pelo teorema 2. Dessa forma, $T$ possui $n$ autovetores linearmente independentes e como $dim(V) = n$, temos que $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base para $V$. Pelo teorema 1, segue que $T$ é um operador diagonalizável.

**Teorema 4:** Uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$ é diagonalizável se, e somente se, $A$ possui $n$ autovetores linearmente independentes.

**Demonstração:** Supondo que $A$ seja uma matriz diagonalizável, então existe uma matriz invertível $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$, onde $u_i$ são vetores coluna $n \times 1$, tal que $A = UDU^{-1}$, com $D$ uma matriz diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Como $A = UDU^{-1} \Rightarrow U^{-1}AU = D \Rightarrow AU = UD$, temos:

$$AU = UD \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_1 = \lambda_1 u_1 \\ \vdots \\ Au_n = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Como $U$ é invertível, não pode ter colunas nulas, isto é, $u_i \neq e_V$. Portanto, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são autovalores de $A$ com $u_1, ..., u_n$ os autovetores associados, respectivamente. E sendo $U$ invertível, suas colunas são linearmente independentes, e assim, $A$ possui $n$ autovetores linearmente independentes.

Reciprocamente, suponha que $A$ tem $n$ autovetores linearmente independentes $u_1, ..., u_n$, associados aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, não necessariamente distintos. Seja $U$ a matriz cujas colunas são os autovetores de $A$, ou seja, $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$. Como $U$ é uma matriz quadrada $n \times n$ e suas colunas são L.I., temos que $U$ é invertível. Assim, temos:

$$\begin{cases} Au_1 = \lambda_1 u_1 \\ \vdots \\ Au_n = \lambda_n u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AU = UD \Leftrightarrow A = UDU^{-1}$$

Logo, $A$ é semelhante a $D$, uma matriz diagonal, o que mostra que $A$ é diagonalizável.

**Teorema 5:** Autovetores, associados a autovalores distintos, de matrizes reais simétricas são sempre ortogonais.

**Demonstração:** Sejam $A$ uma matriz real simétrica, $v$ e $w$ autovetores de $A$ associados aos autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$, respectivamente, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Temos que $Av = \lambda_1 v$ e $Aw = \lambda_2 w$. Segue então que:

$$w^t(\lambda_1 v) = \lambda_1 w^t v = \lambda_1 v^t w = (\lambda_1 v)^t w = (Av)^t w = v^t A^t w = v^t(Aw) = v^t(\lambda_2 w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1(v^t w) = \lambda_2(v^t w)$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos que $v^t w = 0$ e portanto, $v$ e $w$ são ortogonais.