Propriedade 1: Seja $A : n \times n$ uma matriz, então $det(A) = det(A^t)$.

Demonstração: Na definição usual de determinantes costumamos fixar a sequência original para os índices das linhas e seguir uma permutação p para os índices das colunas em cada um dos produtos elementares. No entanto, podemos também fixar a sequência original para os índices das colunas e seguir uma permutação p para os índices das linhas e, então, cada produto elementar com sinal seria escrito como: $sgn(p)a_{j_1 1}a_{j_2 2}...a_{j_n n}$, com $p \in \mathcal{P}$.

Note que podemos reordenar os fatores $a_{j_i i}$ de tal modo que os índices das linhas obedeçam a ordem original e os índices das colunas obedeçam alguma permutação $\bar{p}$, associando a todo produto elementar um único produto elementar da forma usual: $sgn(\bar{p})a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$. Logo, o conjunto de todos os produtos elementares com sinal: $sgn(\bar{p})a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ é igual ao conjunto de todos os produtos elementares com sinal: $sgn(p)a_{j_1 1}a_{j_2 2}...a_{j_n n}$. Como o determinante de A é o somatório de todos os produtos elementares, segue que $det(A) = det(A^t)$.

Propriedade 2: Se $D : n \times n$ é uma matriz diagonal, então $det(D) = d_{11}d_{22}...d_{nn}$.

Demonstração: Uma matriz diagonal é tal que $d_{ij} = 0$ quando $i \neq j$. Logo, como em um produto elementar da matriz não aparece mais de um elemento da mesma linha ou da mesma coluna, o único produto elementar de D não nulo é $d_{11}d_{22}...d_{nn}$ e este recebe sinal positivo. Assim, da definição de determinante, a única parcela do somatório que terá todos os fatores não nulos é a que envolve somente os elementos da diagonal; as demais sempre irão conter pelo menos um elemento d_{ij} com $i \neq j$ e logo, serão nulas. Portanto, $det(D) = d_{11}d_{22}...d_{nn}$.

Propriedade 3: Se uma matriz $A : n \times n$ tem uma linha ou uma coluna nula, então $det(A) = 0$.

Demonstração: Como cada produto elementar com sinal de A tem um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna, é claro que todo produto elementar terá pelo menos um fator nulo, vindo da linha (ou coluna) nula. Neste caso, todo produto elementar com sinal de A será nulo e, portanto, como o determinante é a soma dos produtos elementares com sinal, $det(A) = 0$.

Propriedade 4: Se $A : n \times n$ é uma matriz triangular, então $det(A) = d_{11}d_{22}...d_{nn}$.

Demonstração: Considere que A é triangular inferior, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$. Um produto elementar de A pode ser escrito da forma: $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$. Como $a_{12} = ... = a_{1n} = 0$, precisamos ter $j_1 = 1$ para obter um produto elementar não nulo. Se $j_1 = 1$ então $j_2 \neq 1$, pois dois elementos não podem vir da mesma coluna, e além disso, como $a_{23} = ... = a_{2n} = 0$, devemos ter $j_2 = 2$ para obter um produto elementar não nulo. Seguindo o mesmo raciocínio obtemos $j_3 = 3, j_4 = 4, ..., j_n = n$ para que o produto elementar seja não nulo. Logo, o único produto elementar não nulo de A será $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ e este recebe sinal positivo. Da definição de determinante segue que $det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$. Se A for triangular superior o raciocínio é análogo.

Propriedade 5 (Determinante de Matrizes Elementares):

(a) Se $E : n \times n$ é uma matriz elementar que representa a operação elementar: permutar as linhas r e s, então $det(E) = -1$;
(b) Se $E : n \times n$ é uma matriz elementar que representa a operação elementar: multiplicar a linha r por um escalar α não nulo, então $det(E) = \alpha$;
(c) Se $E : n \times n$ é uma matriz elementar que representa a operação elementar: somar à linha r a linha s multiplicada por um escalar α não nulo, então $det(E) = 1$.

Demonstração: **(a)** Como as linhas r e s foram permutadas, os elementos de E são:

- na linha r: $e_{rs} = 1$ e $e_{rj} = 0$ para $j \neq s$;
- na linha s: $e_{sr} = 1$ e $e_{sj} = 0$ para $j \neq r$;

- nas demais linhas: $e_{ii} = 1$ e $e_{ij} = 0$ para $j \neq i$.

Então, o único produto elementar de E não nulo é o composto pelos $(n-2)$ elementos e_{ii}, $i \neq r$ e $i \neq s$, e os fatores e_{rs} e e_{sr}. Supondo, sem perda de generalidade, que o valor do índice r é menor que o do índice s, ou seja, a ordem original é: $1, 2, ..., r, ..., s, ..., n$, temos o único produto elementar não nulo assim ordenado: $e_{11}e_{22}...e_{rs}...e_{sr}...e_{nn}$. A permutação associada a este produto é $(1, 2, ..., s, ..., r, ..., n)$, de modo que a ordem original pode ser obtida apenas com uma troca entre os índices r e s. Logo, a permutação é ímpar e o sinal do produto elementar será negativo. Como todos os fatores do produto são iguais a 1, segue que $det(E) = -1$.

(b) Como a linha r foi multiplicada por um escalar $\alpha \neq 0$, a matriz E é uma matriz diagonal com entradas da diagonal nas linhas $i = 1, ..., n$, $i \neq r$ iguais a 1 e a entrada $e_{rr} = \alpha$. Pela propriedade 2 segue que $det(E) = \alpha$.

(c) Adicionando à linha r um múltiplo $\alpha \neq 0$ da linha s, os elementos de E serão:

- na linha r: $e_{rs} = \alpha$, $e_{rr} = 1$ e $e_{rj} = 0$, $j \neq r$ e $j \neq s$;
- nas demais linhas: $e_{ii} = 1$ e $e_{ij} = 0$, $j \neq i$.

Nesse caso, se $r < s$, então E é uma matriz triangular superior. Se $r > s$, então E é uma matriz triangular inferior. Em todos os casos E será uma matriz triangular e, pela propriedade 4 segue que $det(E) = 1$, uma vez que os elementos da diagonal de E são todos iguais a 1.

Os mesmos resultados da propriedade 5 valem para as matrizes elementares que representam operações elementares de coluna. A demonstração é análoga, ou então a afirmação segue da propriedade 1.

Propriedade 6: Seja A uma matiz $n \times n$.

(a) Se B é a matriz que resulta quando permutamos duas linhas de A, então $det(B) = -det(A)$;
(b) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha de A é multiplicada por um escalar α não nulo, então $det(B) = \alpha det(A)$;
(c) Se B é a matriz que resulta a partir de A adicionando-se à uma linha r de A um múltiplo α não nulo de outra linha s, então $det(B) = det(A)$.

Demonstração: **(a)** Considere B obtida a partir de A permutando-se as linhas r e s de A. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $r < s$. Assim, um produto elementar de A pode ser escrito da forma:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}...a_{sj_s}...a_{nj_n}$$

que é igual ao produto elementar de B:

$$b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{sj_r}...b_{rj_s}...b_{nj_n}$$

uma vez que as linhas de B são iguais as de A, exceto pelas linhas r e s que forma permutadas. Escrevendo o produto elementar de B na forma usual (seguindo a ordem original para os índices das linhas), temos:

$$b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{rj_s}...b_{sj_r}...b_{nj_n}$$

Portanto, a permutação associada ao produto elementar de B é $(1, 2, ..., s, ..., r, ..., n)$, que é a permutação associada ao produto elementar de A com uma troca entre os índices r e s. Ou seja, para recuperar a ordem original a partir da permutação associada ao produto elementar de B, precisamos realizar uma troca a mais do que partindo da permutação associada ao produto elementar de A. Logo, se esta permutação for par, aquela será ímpar e vice-versa. Dessa forma, cada produto elementar de B tem sinal oposto ao do produto elementar correspondente de A. Portanto, $det(B) = -det(A)$.

(b) Considere B obtida a partir de A quando a linha r de A é multiplicada por um escalar $\alpha \neq 0$. Cada produto elementar de B será da forma:

$$b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{rj_r}...b_{nj_n} = a_{1j_1}a_{2j_2}...\alpha a_{rj_r}...a_{nj_n} = \alpha(a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}...a_{nj_n})$$

Dessa forma, cada produto elementar de B será um múltiplo α de um produto elementar de A, e o sinal do produto elementar não se altera. Logo,

$$det(B) = \sum_{p \in \mathcal{P}} sgn(p) b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{rj_r}...b_{nj_n} = \alpha \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} sgn(p) a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}...a_{nj_n} \right)$$

Portanto, $det(B) = \alpha det(A)$.

(c) Considere que a linha r de B é obtida adicionando-se à linha r de A um múltiplo $\alpha \neq 0$ da linha s de A. Cada produto elementar de B será da forma:

$$b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{rj_r}...b_{sj_s}...b_{nj_n} = a_{1j_1}a_{2j_2}...(a_{rj_r} + \alpha a_{sj_r})...a_{sj_s}...a_{nj_n} =$$

$$= (a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}...a_{nj_n}) + \alpha(a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{sj_r}...a_{sj_s}...a_{nj_n})$$

O primeiro termo é um produto elementar de A e o segundo é um produto elementar de uma matriz $\bar{A}$ obtida a partir de A com as linhas r e s iguais. Como $\bar{A}$ possui duas linhas iguais, se permutarmos estas linhas obtemos uma matriz $\bar{B}$ que é igual a matriz $\bar{A}$ e, portanto, $det(\bar{B}) = det(\bar{A})$. Mas, pela propriedade $6(a)$ já demonstrada temos que $det(\bar{B}) = -det(\bar{A})$. A única forma disto acontecer é se $det(\bar{A}) = 0$. Assim, temos:

$$det(B) = \sum_{p \in \mathcal{P}} sgn(p) b_{1j_1}b_{2j_2}...b_{rj_r}...b_{sj_s}...b_{nj_n} =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}} sgn(p) a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}...a_{nj_n} + \alpha \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} sgn(p) a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{sj_r}...a_{sj_s}...a_{nj_n} \right)$$

Portanto, $det(B) = det(A) + \alpha det(\bar{A}) \Rightarrow det(B) = det(A)$.

Os mesmos resultados da propriedade 6 também valem substituíndo-se "linhas" por "colunas". A demonstração segue análoga.

Propriedade 7: Se $A : n \times n$ possui duas linhas ou colunas proporcionais, então $det(A) = 0$.

Demonstração: Suponha, por exemplo, que a linha r de A é proporcional a linha s com um fator de proporcionalidade α, isto é, $l_r = \alpha l_s$. Podemos adicionar à linha r de A o múltiplo $-\alpha$ da linha s, obtendo uma matriz B. Dessa forma, a linha r de B será nula e, pela propriedade 3, $det(B) = 0$. Mas, como B foi obtida a partir de A apenas adicionando-se à linha r de A um múltiplo da linha s, pela propriedade $6(c)$ temos que $det(B) = det(A) = 0$. Para as colunas a demonstração segue análoga.

Propriedade 8: Sejam $A : n \times n$ uma matriz quadrada, $E : n \times n$ uma matriz elementar e $B = EA$. Então $det(B) = det(EA) = det(E)det(A)$.

Demonstração: **(a)** Se E representa a operação elementar: permutar duas linhas da matriz, então pela propriedade $5(a)$ temos que $det(E) = -1$. Além disso, $B = EA$ é obtida a partir de A permutando-se duas linhas de A e, pela propriedade $6(a)$ temos que $det(B) = -det(A)$. Logo,

$$det(B) = (-1)det(A) = det(E)det(A)$$

(b) Se E representa a operação elementar: multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$, então pela propriedade $5(b)$ temos que $det(E) = \alpha$. Além disso, $B = EA$ é obtida a partir de A multiplicando-se uma linha de A por α e, pela propriedade $6(b)$ temos que $det(B) = \alpha det(A)$. Logo,

$$det(B) = \alpha det(A) = det(E)det(A)$$

(c) Se E representa a operação elementar: somar à uma linha da matriz outra multiplicada por um escalar $\alpha \neq 0$, então pela propriedade $5(c)$ temos que $det(E) = 1$. Além disso, $B = EA$ é obtida a partir de A somando-se à uma linha de A um múltiplo α de outra linha e, pela propriedade $6(c)$ temos que $det(B) = det(A)$. Logo,

$$det(B) = 1det(A) = det(E)det(A)$$

Podemos estender este resultado para qualquer número de matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_m$. Isto é:

$$det(E_m E_{m-1}...E_1 A) = det(E_m)det(E_{m-1}E_{m-2}...E_1 A) = ... = det(E_m)det(E_{m-1})...det(E_1)det(A)$$

Propriedade 9 (Regra Para o Produto): Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então $det(AB) = det(A)det(B)$.

Demonstração: Caso A não seja inversível, então $det(A) = 0$ e, além disso, AB também não é inversível. Daí que $det(AB) = 0 = det(A)det(B)$. Analogamente, o resultado é verdadeiro supondo B não inversível. Caso A seja inversível, então a forma escalonada reduzida de A é I_n, ou seja, existem matrizes elementares tais que:

$$(E_m E_{m-1}...E_1)A = In \Leftrightarrow A = (E_m E_{m-1}...E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_m^{-1}$$

As matrizes $E_1^{-1}, E_2^{-1}, ..., E_m^{-1}$ são também matrizes elementares e:

$$det(A) = det(E_1^{-1}E_2^{-1}...E_m^{-1})$$

Além disso, $AB = (E_1^{-1}E_2^{-1}...E_m^{-1})B$ e, de acordo com a generalização da propriedade 8:

$$det(AB) = det(E_1^{-1}E_2^{-1}...E_m^{-1}B) = det(E_1^{-1})det(E_2^{-1})...det(E_m^{-1})det(B) =$$

$$= det(E_1^{-1}E_2^{-1}...E_m^{-1})det(B) = det(A)det(B)$$

Portanto, $det(AB) = det(A)det(B)$.