Propriedades - Dependência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Valem as propriedades:

(P1) Se um conjunto finito de elementos de V contém o elemento neutro e de V, este conjunto é L.D.

Prova: Considere um conjunto contendo o elemento neutro de V, $S = \{e, v_2, ..., v_n\} \subset V$. Então temos:

$$\alpha e + 0v_2 + ... + 0v_n = e$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, uma vez que $\alpha e = e$, por uma propriedade de espaços vetoriais. Assim, existe pelo menos um $\alpha \neq 0$ que satisfaz a equação, o que mostra que o conjunto S é L.D., por definição.

(P2) Se $S = \{v\} \subset V$, com $v \neq e$, então S é L.I.

Prova: Considere equação:

$$\alpha v = e$$

Como $v \neq e$, então temos $\alpha = 0$, por uma propriedade de espaços vetoriais. Assim, S é L.I.

(P3) Se $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus elementos é combinação linear dos demais.

Prova: Como S é L.D., por definição temos que existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = e$$

Supondo que $\alpha_i \neq 0$, podemos dividir a equação por α_i:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 + ... + v_i + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

O que mostra que v_i é combinação linear dos demais elementos de S.

(P4) Sejam S_1 e S_2 subconjuntos finitos e não vazios de V. Se S_1 é L.D. e $S_1 \subset S_2$, então S_2 também é L.D.

Prova: Supondo $S_1 = \{v_1, ..., v_r\}$ e $S_2 = \{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$. Se S_1 é L.D., então existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_r$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = e$$

Assim, completando a equação com zeros, teremos:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + 0v_{r+1} + ... + 0v_n = e$$

E como nem todos os escalares desta última igualdade são nulos, temos que S_2 é L.D.

(P5) Sejam S_1 e S_2 subconjuntos finitos e não vazios de V. Se S_2 é L.I. e $S_1 \subset S_2$, então S_1 também é L.I.

Prova: Caso S_1 fosse L.D., então pela propriedade (P4), teríamos que S_2 também é L.D., mas por hipótese S_2 é L.I. Assim, S_1 só pode ser L.I.

(P6) Se $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é L.I., e para algum $v \in V$ tivermos que $S \cup \{v\} = \{v_1, v_2, ..., v_n, v\}$ é L.D., então o elemento v é combinação linear dos elementos de S.

Prova: Se temos $\{v_1, ..., v_n, v\}$ L.D. Então, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$ não todos nulos tais que:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \alpha v = e \qquad (*)$$

Podemos verificar que um dos escalares não nulos é α, uma vez que se $\alpha = 0$ teríamos:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = e$$

Mas, como S é L.I. esta última igualdade só vale se $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Porém, neste caso teríamos $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha = 0$ e dai o conjunto $\{v_1, ..., v_n, v\}$ seria L.I., o que contradiz a hipótese dele ser L.D.

Assim, temos $\alpha \neq 0$. Podemos então dividir a equação $(*)$ por α:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n + v = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n$$

O que mostra que v é combinação linear dos elementos de S, ou seja, $v \in [S]$.

(P7) Se $S = \{v_1, ..., v_j, ..., v_n\}$ e $u_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Esta propriedade afirma que se um elemento é combinação linear dos demais, ele pode ser extraído do conjunto de geradores, pois o subespaço gerado não se altera.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $j = 1$. Como v_1 é combinação linear dos demais elementos de S, então ele pode ser escrito como:

$$v_1 = \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$$

Considere um elemento $z \in [S]$, isto é, z pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S:

$$z = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \alpha_1(\beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n) + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n =$$

$$= (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) v_2 + ... + (\alpha_n \beta_n + \alpha_n) v_n$$

O que mostra que z é combinação linear dos elementos de $[S - \{v_1\}]$, ou seja, $z \in [S - \{v_1\}]$.

Agora, supondo que $z \in [S - \{v_1\}] \Rightarrow 0 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_n v_n \Rightarrow z \in [S]$.

Portanto, qualquer elemento de $[S]$ pertence a $[S - \{v_1\}]$ e vice-versa. Logo, os dois subespaços são iguais e o elemento v_1 pode ser extraído do conjunto de geradores.