Corolário - Teorema do Núcleo e da Imagem

Corolário: Sejam U e V espaços vetoriais de mesma dimensão e seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é sobrejetora.
(b) T é bijetora.
(c) T é injetora.
(d) T transforma base de U em base de V.

Demonstração: Se alguma das condições se verifica, então uma implicará na seguinte, e todas serão verdadeiras. Assim, começando a demonstração supondo como hipótese a afirmação (a), temos que mostrar as seguintes implicações: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$, fechando um ciclo. Supondo, de início, válida a afirmação (a):

$(a) \Rightarrow (b)$: Supomos que T é sobrejetora e queremos mostrar que é bijetora, logo, precisamos mostrar que T é injetora. Se T é sobrejetora, então para todo $v \in V$ existe um $u \in U$ tal que $T(u) = v$, logo $Im(T) = V$, ou seja, todos os elementos de V são imagem de um elemento de U, através da transformação linear T. Mas como $Im(T) = V$, isto implica que $dim(Im(T)) = dim(V)$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos a relação:

$$dim(V) = dim(Im(T)) + dim(\mathcal{N}(T)) \Rightarrow dim(\mathcal{N}(T)) = 0$$

Assim, como a dimensão do núcleo de T é nula, temos $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$, o que implica em T injetora.

$(b) \Rightarrow (c)$: Assumindo que T é bijetora, já temos diretamente que T é injetora.

$(c) \Rightarrow (d)$: Temos por hipótese que T é injetora, queremos mostrar que T leva uma base de U em uma base de V.
Supondo $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base para U, devemos mostrar que $B_2 = \{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ forma uma base para V. Como os dois espaços U e V têm mesma dimensão e B_1 e B_2 também têm o mesmo número de elementos, basta mostrarmos que B_2 é L.I. Considerando a combinação linear:

$$\beta_1 T(u_1) + ... + \beta_n T(u_n) = e_V \Rightarrow T(\beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n) = e_V$$

pois T é transformação linear. Assim, $\beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n$ pertence ao núcleo de T. Mas como, por hipótese, T é injetora, temos $\mathcal{N}(T) = \{e_U\}$, logo, $\beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n = e_U$ e temos uma combinação de elementos da base B_1 que resulta no elemento neutro de U, e como B_1 é L.I., tiramos que $\beta_1 = ... = \beta_n = 0$, o que mostra que B_2 é L.I. e portanto, é base para V.

$(d) \Rightarrow (a)$: Assumindo que T leva base de U em base de V, temos que provar que T é sobrejetora, ou seja, que para todo $v \in V$ existe um $u \in U$ tal que $T(u) = v$.
Seja $v \in V$. Da hipótese temos que, se $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$ é base de U, então $B_2 = \{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é base de V. Assim, o elemento v pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B_2:

$$v = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n) \Rightarrow v = T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n)$$

uma vez que T é transformação linear. E como B_1 é base de U, temos que: $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = u$ que pertence a U. Logo, $v = T(u)$, para um $u \in U$. O que mostra que T é sobrejetora.